

MODERN SOCIAL SCIENCES SERIES

現代社會科學叢書

現代邏輯學

李树琦 蔡春庚 蒋艳华 著 重慶出版社





MODERN SOCIAL SCIENCES SERIES

現代社會科學叢書

現代邏輯學

李树琦 蔡春庚 蒋艳华 著 重慶出版社





MSSS

特约编辑　侯胜田
封面设计　金乔楠
技术设计　刘黎东

李树琦　蔡春庚　蒋艳华 著

现代逻辑学

重庆出版社出版、发行　（重庆长江二路205号）
新 华 书 店 经 销　重庆长征印刷厂印刷

*

开本850×1168　1/32　印张 14 插页 6　字数 344 千
1989年7月第一版　1989年7月第一版第一次印刷
印数：1—3,000

*

ISBN7-5366-0844-6/B·20
定价：4.50元



本书主要作者李树琦，1942年生人，1966年毕业于河北大学哲学系，1981年毕业于中国社会科学院研究生院逻辑专业，现在中国社会科学出版社工作。曾发表有《以数理逻辑解析“指物论”》（刊《研究生院学报》）、《论“构造矛盾谓项”的诡证方法》（刊《中国社会科学》）等20余篇论文及《公孙龙逻辑思想探微》、《现代逻辑方法论》、《现代人的心理学》等专著和译著。

出版者的话

前些年国内一些兄弟出版社出了许许多多介绍国外新知识的中小型读物。这些小册子围绕一个小的领域或一件两件事情，使用新的概念和新的方法进行研究和阐述，就像放电一样，迸出一朵又一朵的耀眼火花。这些小册子对文革后国内知识界的观念更新起了良好的启蒙作用。

但时至今日，广大读者已不能满足这些零星的介绍了。人们意识到，要成为一个现代文化人，非系统掌握社会科学各学科新的理论体系不可。而社会科学新知识的系统介绍又朝向两个方面发展：一是系统介绍各门新的学科；一是系统介绍老学科的新内容。在前一个方面，现在已引起广泛的兴趣，一本又一本的《××学》正在陆续出版。可是对后一个方面却未引起应有的注意。事实上这些老学科今日仍是社会科学中的骨干学科。社会科学的基础理论骨架仍然基本上被蕴含在这些老学科之中。为了使广大读者系统了解这些骨干学科的新内容，重庆出版社组织高层次研究机构的专家编写了这一套中级学术读物。这一套书的每一本在开始部分力求通俗，引人入胜，然后逐步升堂入室，达到较高深的境界。原来学科功底较差的读者能够逐步加深理解，而知识原较广博的读者又都有所获，百尺竿头更进一步。

为了保证编辑质量，我们聘请了人民出版社、中华书局、人民日报、解放军出版社和中国社科出版社等单位的一些专业编辑或编辑室主任担任特约编辑。在此一并致谢。

重庆出版社

1988年7月

目　　录

第一章 绪　论

“现代逻辑”是跟“传统逻辑”相对而言的。传统逻辑又主要是指传统形式逻辑，它起源于两千多年前的亚里士多德逻辑，以及中国的先秦名学和印度的因明学，它们又可以统称为古典逻辑，尽管其中也有片断的对归纳问题的探讨，但侧重于演绎问题的研究。直到近代实证科学发展，英国哲学家弗·培根和穆勒等又使传统逻辑充实了归纳问题的研究。我们现在所见到的“形式逻辑”或“普通逻辑”著作，大多属于用自然语言表述的传统逻辑范围。然而，一旦在逻辑研究中超出这个范围，一旦引入数学方法并且加强对人工符号语言的应用，那便产生了大大优越于传统形式逻辑的现代逻辑。

现代逻辑的最初设想起源于17世纪的德国科学家莱布尼茨。他曾经设想一种“通用语言”和“通用数学”。他说：“我将作出一种通用代数，在其中一切推理的正确性将化归于计算。它同时又将是通用语言，但却和目前现有的一切语言完全不同，其中的字母和字将由推理来确定。”①对于莱布尼茨的这一伟大设想，德国逻辑学家肖尔兹曾经说：“它使亚里士多德逻辑开始了‘新生’，这种新生的逻辑在今天最完美的表现就是采用数理逻辑形式的现代精确逻辑。”②应该说，现代逻辑的主体部分是数理逻辑。

① 参莫绍揆《数理逻辑初步》，上海人民出版社1980年版，第9页。
② 〔德〕肖尔兹《简明逻辑史》，商务印书馆1977年版，第48页。

在正式学习现代逻辑学的内容之前，应该对它的历史发展过程和它的各个子学科有所了解。

第一节　逻辑思想的发展

逻辑学是一门古老的科学。它已有了几千年的发展历史。中国、印度和希腊在纪元前就有了比较系统的逻辑学研究和著述。下面作一些简介。

一　中国“名学”

中国在先秦时代就兴起了对逻辑问题的探讨，后人称之为“名学”。名学研究起初是由关于概念（“名”）与其所代表的事物（“实”）的关系（即所谓“名实关系”）的讨论引起的。当时正是奴隶社会向封建社会过渡的时期，许多名词和它所代表的事物之间的关系发生了变化，出现了一些新事物，而旧的名称不足以表明新的内容。于是如何使名词与其所代表的事物相一致，就成了一个具有政治与社会意义的重要问题，从而产生了所谓“正名”的逻辑问题。

（一）墨家的逻辑思想

《墨子》一书中的《经上》、《经下》、《经说上》、《经说下》、《大取》、《小取》六篇统称《墨经》，其内容主要是关于自然科学和逻辑的。这六篇看来并非墨翟（公元前480—420年）自著，而是后期墨家的作品。其中《小取》篇说：“以名举实，以辞抒意，以说出故。”“名”是“概念”，“辞”是“命题”，“说”是“推理”，《墨经》对这三者都曾加以研究。

关于概念。墨家把“名”分为“达”、“类”、“私”三种。《经说》中举例说“物”是达名，“马”是类名，“臧”是私名（私名就是专有名词）。《大取》篇还说：“以形貌命者必

知是之某也，焉（乃）知某也。”这是在讲具体概念；又说：“不可以形貌命者，唯（虽）不知是之某也，知某可也。”这又是在讲抽象概念。

关于命题。《墨经》中区分了全称命题与特称命题。全称命题中表示数量的词在当时是用“尽”字。《经上》所谓“尽，莫不然也”，比如“越国之宝尽在此”就是一个全称命题。特称命题中表示数量的词在当时是用“或”字。《小取》所谓“或也者，不尽也”，比如“今天下之士君子或以命为有”就是一个特称命题。《墨经》中也涉及到了周延性问题。《小取》说：“乘马不待周乘马然后为乘马也。有乘于马，因为乘马矣。逮至不乘马，待周不乘马，而后为不乘马。此一周而一不周也。”这是说，乘某一匹马就算“乘马”，而不乘任何马才能算作“不乘马”。这里实际上是在说明肯定命题的谓项不周延，否定命题的谓项周延。

关于推理。墨家举出了“辟”、“侔”、“援”、“推”（见《小取》)四种推理形式。第一是“辟”：“辟也者，举也(他）物而以明之也。”“辟”就是“譬”，即譬喻。第二是“侔”：“侔也者，比辞而俱行也。”“侔”相当于现代逻辑中的“直接推理”。例如“白马马也，乘白马，乘马也”，就是三辞相比而俱行。第三是“援”：“援也者，日：子然，我奚独不可以然也？”“援”是援引对方所说的话来作类比推理的前提。“援”与“辟”都是类比推理，区别在于“辟”所用的前提是众所公认的命题，而“援”所用的前提则是对方说过的话。第四是“推”：“推也者，以其所不取之同于其所取者予之也。是犹谓也者同也。吾岂谓也者异也。”“推”是一种特殊的类比推理，它是利用对方所提出的某一命题作为前提，推出一个对方不可能接受的结论，从而反驳了对方原来提出的命题。这也是一种反驳，在这种反驳方式中常用“是犹”两字来表示两个命题类似。例如《墨

子·公孟》中说："公孟子曰：'无鬼神。'又曰：'君子必学祭礼。'子墨子曰：'执无鬼而学祭礼，是犹无客而学客礼也，是犹无鱼而为鱼罟也。'"所以定义中说"是犹谓也者同也"。还有，为了回答"推"式的反驳，被反驳者可以指出，反驳者所认为类似的两个命题实际上并不类似。在这种时候可以用"吾岂谓"（"我所说的不是这个意思"），"吾岂谓也者异也"就是说的对"推"式反驳的反驳。

墨家还讨论了近似矛盾律的问题。《经上》中曾讲到两个互相矛盾的命题不能同时成立，必定有一个不能成立。原文说："辩，争彼也。辩胜，当也。说曰辩或谓之牛，或谓之非牛，是争彼也。是不俱当，不俱当必或不当。不当若犬。"这里说的是："这是牛"与"这不是牛"这两个互相矛盾的命题是不能同时成立的（"不俱当"），而其中必定有虚假命题（"必或不当"），虚假命题正如"指牛为犬"一样（"不当若犬"）。这里虽然讨论的是具体命题，但是主旨在于阐述一般性的逻辑道理。用具体直观的事物表明抽象隐含的理论，这是先秦逻辑的一大特点。

以上只是对墨家逻辑思想作了点滴介绍。丰富深邃的墨家逻辑思想不仅在中国，而且在世界逻辑史上也占有重要地位。

（二）名家的逻辑思想

我们这里所谓"名家"是指那些专门讨论"名实"问题而又被后人称为"辩士"、"察士"的学者，如公孙龙、惠施等人。尤其是公孙龙（约公元前325—250年），因为留下的资料较全，所以我们的阐述准备以他为代表。《公孙龙子》一书现存6篇，其中《迹府》篇是后人纂集的关于公孙龙的故事，其他5篇有《白马论》、《指物论》、《通变论》、《坚白论》和《名实论》。

公孙龙的逻辑思想主要是关于概念的讨论。他的关于类的理论是有价值的。其次他还提出了可以看作同一律与矛盾律雏形的说法。他关于名与实关系的理论是建立在他关于共相的唯心主义

哲学理论之上的。他认为共相是一种独立存在，比如一块“白石头”，其白色和坚硬性是可以独立存在的。《坚白论》说：“视不得其所坚而得其所白者，无坚也。”看的时候感觉不到坚硬性，而只感觉到白色，这时候坚硬性等于没有。又说：“拊不得其所白而得其所坚者，无白也。”触的时候感觉不到白色，而只感觉到坚硬性，这时候白色等于没有。结论：“得其白，得其坚，见与不见离。一一不相盈故离，离也者藏也。”或者感觉到白色，或者感觉到坚硬性，感觉到的与感觉不到的是彼此分离的。彼此不联在一起，所以说是分离，而分离就是藏在自身之中。这是关于共相的唯心主义结论。

公孙龙最著名的命题是“白马非马”。仅仅就这一命题本身来看，确实含有诡辩的性质。但他在《白马论》中所作的关于类与类之间的关系的分析却并非都是错误的。文中对“白马非马”命题的论证可以归结为八个方面，我们只举其二：

“曰：‘马者所以命形也；白者所以命色也。命色者非命形也，故曰白马非马’。”就是说：“马”指形体，“白”指颜色。指颜色的不是指形体的，所以“白马非马”。

“曰：‘求马，黄黑马皆可致；求白马，黄黑马不可致。使白马乃马也，是所求一也。所求一者，白者不异马也。所求不异，如黄黑马有可有不可何也？可与不可，其相非明。故黄黑马一也，而可以应有马，而不可以应有白马，是白马之非马审矣。’”就是说：如果有人要马，那么给他黄马或黑马都可以；而如果有人要白马，那么就不可以给他黄马或黑马了。所以“白马非马”。

从公孙龙的若干论据来看，他是先论证白马与马不同，然后说，既然白马与马不同，那么就是“白马非马”了。他是从“甲不同于乙”的前提中推出了“甲非乙”的结论。我们说，从现代逻辑的观点来看，“白马”和“马”作为两个类确实不是同一

的，因为白马类包含在马类之中，而马类却不包含在白马类之中。公孙龙在说明这一点时所用的论据也有一部分是正确的。但是他更进一步推论说“白马不是马”，这却是错误的。

在《名实论》中，公孙龙还讨论了概念（“名”）与其所指（“实”）的关系问题。“彼彼止于彼，此此止于此，可；彼此而彼且此，此彼而此且彼，不可。”就是说：如果认为那个就是那个，这个就是这个，是正确的；而如果认为那个也是这个，这个也是那个，则是不正确的。这里提出了概念的所指必须确定的规律。前者类似同一律，后者类似矛盾律。

当然，我国先秦时代除了名家、墨家之外，其他诸家也都有较多的逻辑思想。自秦汉以后直至明清，中国特有研究方式的逻辑学说也在不断丰富。自明清之后，西方逻辑学说传入中国。

二 印度“因明学”

“因明”是梵语“希都费陀”（Hetuvidya）的意译。“因”指推理的依据，“明”指通常说的学术。“因明学”是古代印度关于推理的学说。

（一）因明学的兴起

因明学大约产生于公元前6世纪，传说它的创始人是乔答摩（也有译作“足目”）。最早关于因明的著作是《正理经》。后来佛教哲学家又推动了因明的发展。因明有古、新之分。佛教大师陈那以前的因明主要取五支作法，属古因明系统 自陈那创立三支作法以后，便产生了新因明系统。新因明的代表作有陈那的《因明正理门论》、商羯罗主的《因明入正理论》和法称的《正理一滴》等。上述陈那和商羯罗主的两部因明论有我国唐代玄奘的译本，系我国通行的新因明范本；法称的因明论在我国有藏译本。我国和日本对因明的研究都卓有成果。

（二）古因明和新因明

古因明和新因明有很多不同之处，其中最主要的区别是由五支作法变为三支作法。所谓五支作法，就是其论式由宗、因、喻、合、结五个部分组成；所谓三支作法，就是其论式简化为宗、因、喻三个部分。现列表对照如下：

五支作法	支名	三支作法
声是无常	宗	声是无常
所作性故	因	所作性故
犹如瓶等，于瓶见是所作与无常	同喻	若是所作见彼无常，犹如瓶等
声亦如是，是所作性	合	
故声无常	结	
犹如空等，于空见是常住与非所作	异喻	若是其常见非所作，犹如空等
声不如是，是所作性	合	
故声无常	结	

其中，“宗”是对论点的陈说，“因”是根据和例证，“喻”是比喻和例证（“同喻”是同类比喻，“异喻”是异类比喻），“合”是在前三者基础上的具体应用，“结”就是结论。五支当中以“宗、因、喻”三部分最为重要，因为“结”只是“宗”的重复，而“合”也已包含在“喻”之中了。所以陈那把五支改为三支，创立了新因明的论式。陈那的三支作法除了删去“合、结”二支外，还对“喻”作了改造。在五支作法里，喻只起比喻和例证的作用，意义不大；但在陈那的三支作法里，喻在例证之上还说出它的普遍意义，这就提高了喻的地位，使喻变成因果关系的带例说明。

从五支改为三支，这是因明史上的一项意义重大的变革，它使因明的论式趋向完善成熟，更切合人类思维的逻辑过程。

（三）宗、因、喻

因明学自演进为三支作法以后，其论式就定型了。甚至连长期坚持五支作法的正理派到后来也接受了三支作法。所以理解宗、因、喻三支，是学习因明学的关键。下面作以介绍。

关于“宗”。我们说过，“宗”是对论点的陈说，它相当于三段论的结论。宗是由宗依组成的，宗依相当于概念，是组成宗的基本单位，如“声”和“无常”就是宗依。任何一个宗都是由体和义两部分组合而成的。“体”（自体）即宗所反映的对象；“义”（涵义）即对象所具有的属性。“体”用逻辑术语来说就是主词，因明则称作自性、有法、所别，总称体三名；“义”用逻辑术语来说就是宾词，因明则称作差别、法、能别，总称义三名。在体三名和义三名当中，通常以“有法”来指称“体”，以“能别”来指称“义”。宗依有一个很重要的特点，就是论敌双方都共同承认的，这情况称作“至极成就”或简称“极成”。

但是，由论敌双方“极成”的宗依组成的宗的整体，却又必须是立者所主张而为敌者所反对的。如“声是无常”宗，就是为数论派所主张而为声论派所反对的。这在因明学上称为“违他顺自”，并把按照违他顺自的要求所建立起来的宗，叫作“不顾论宗”。“不顾论宗”是立宗的正格。值得注意的是：逻辑推理的任务在于推出新命题，与前提中的命题一样，只要对事物作出断定就行，无须问论敌是否同意。但是因明却很讲究“违他顺自”这一点，把这看作是立宗的准则。如果有那一个宗竟是论敌双方共同认可的，那就要犯“相符极成”的过失，整个三支推理就不能成立。

关于“因”。“因”是推理的依据和理由。在因明三支作法中，因支相当于小前提，喻支相当于大前提，但以因支为主，喻支为辅。原由是：因支在推理中不仅仅是小前提，还起着中间媒介的作用，相当于三段论的中词。但是因支与中词在媒介的方式

上又是颇不一样的；中词是通过自身的周延（即被大词所包含）来担负它的媒介任务的，而因却是通过包含宗中的有法（即小词）来完成媒介的。

因明学十分重视对因的研究。立论者为了开悟论敌所使用的“生因”和论敌受到启示而有所解悟的“了因”，统称“二因”。“二因”又生“六因”：即“生因”分为言生因、智生因和义生因，其中以言生因为正因；“了因”分为智了因、言了因和义了因，其中以智了因为正因；而言生因又是智了因之因，智了因又是言生因之果。因明学还有“因三相”理论：第一相“遍是宗法性”，研究因与宗上有法的关系（中词与小词的关系）；第二相“同品定有性”，研究因与宗中之法的关系（中词与大词的关系）；第三相“异品遍无性”，与第二相通过“同品”从正面检验当原因出现时结果是否也随之出现相反，第三相则通过“异品”从反面来进一步考察如果结果不存在时原因是否也一定不存在。

关于“喻”。“喻”是比喻和例证，用来使人了解所立之宗的。在三支作法里，喻相当于三段论的大前提，但是它的组成远比大前提复杂，它是由喻体和喻依两部分组成的，并且是同喻和异喻的联合，例如：

<table>
<tr><td colspan="2">宗</td><td colspan="2">此山有火</td></tr>
<tr><td colspan="2">因</td><td colspan="2">以有烟故</td></tr>
<tr><td rowspan="2">喻</td><td>同喻</td><td>凡有烟处必有火，
（同喻体）</td><td>如　灶
（同喻依）</td></tr>
<tr><td>异喻</td><td>凡无火处必无烟，
（异喻体）</td><td>如　湖
（异喻依）</td></tr>
</table>

喻体即普遍性的命题，作用与大前提相当；喻依即例证，作用与归纳法中的契合、差异二法相似。喻的组成虽然比较复杂，但在具

体表述时常可省略，一般常省去异喻，甚至连同喻中的同喻体亦可省去，而只保留同喻依。

因明学的理论极其丰富，它在世界逻辑思想史上也占居重要地位。

三 希腊"逻辑学"

古代希腊是欧洲逻辑学说的发源地。由于当时社会历史的变动，演讲和辩论很受重视，于是发展了辩论术。同时由于生产和航海的发展，也产生了萌芽时期的数学和其他自然科学。辩论术、数学和自然科学的发展对逻辑学的产生是有决定性影响的。我们在此主要介绍亚里士多德逻辑学说，以及斯多噶派与伊壁鸠鲁派逻辑学说。

（一）亚里士多德逻辑学说

亚里士多德（公元前384—322年）是古希腊最博学的哲学家，他的著作涉及当时的一切知识领域。他的逻辑著作是《工具论》，这是古代一部最完备的逻辑著作，而且两千多年来有着历久不衰的影响。如下主要介绍几个方面。

1.范畴　范畴就是最普遍的谓项。亚里士多德把各种各样的判断的谓项分为10个大类，这就是有名的"十范畴"。即：(1)实体（如人、马）；（2）数量（如2尺长，100斤重）；（3）性质（如白的，通晓语法的）；（4）关系（如2倍，较大的）；（5）活动（如说话，思考）；（6）遭受（如被打，被骂）；（7）地点（如在市场里，在雅典）；（8）时间（如昨天，去年）；（9)姿态（如坐着，躺着）；（10）状况（如穿鞋的，有武装的）。

2.命题　亚里士多德认为，只有或真或假的句子才是命题。一个祈使句就不是命题，因为它没有真假问题。亚里士多德把命题首先分为简单的与复合的，而简单命题又分为肯定的与否定

的。那些具有同一主项和谓项的肯定命题和否定命题，就称为矛盾命题。他还指出命题有时涉及一个全称的主项(例如“人”)，有时涉及一个单称的主项(例如“卡里亚斯”)。他说：“如果有人关于一个全称主项作了一个一般性的肯定命题和一个一般性的否定命题，则这两个命题乃是‘反对’命题。”(《解释篇》)亚里士多德对模态命题也作了较详尽的讨论。

3.三段论　亚里士多德关于三段论的理论对后来形式逻辑的发展曾有很大的影响。但后人也曾有不少的误解。如下列三段论曾长期被看作亚里士多德三段论的一个例子：所有的人都是会死的，苏格拉底是人，所以，苏格拉底是会死的。有些现代注释家指出，这一例子在好几点上与亚里士多德所讲的三段论不同。首先，“苏格拉底是人”是一个单称命题，而亚里士多德的三段论中是不用单称命题作前提的。其次，亚里士多德的三段论中，前提与结论是表示为蕴涵关系的。《工具论》中曾这样举例：如果所有阔叶植物都是落叶的，并且所有葡萄树都是阔叶植物，则所有葡萄树都是落叶的。

亚里士多德在讨论三段论时还有一个特点，就是他很少举具体的例子。关于正确的形式，他多数时候都是举的包含字母的图式。他举出的图式是象下面这种样子：如果所有B是A，并且所有C是B，则所有C是A。当然多数时候，他并不说“所有B是A”，而是说“A对于所有B有所述说”或“A属于所有B”。

亚里士多德还制定了有关模态三段论的规则。他认为在必然三段论中，一个必然前提与非模态的前提的某些组合可以得出必然结论。他也讨论了或然三段论的各种形式。他对于前提中的“可能”一词是理解为“既非不可能也非必然”。

4.其它　关于证明问题，如果说亚里士多德在《分析前篇》中主要陈述了有关三段论的理论，那么在《分析后篇》中则陈述了有关科学知识的理论，即关于证明的理论。他首先指出要通过

推理获得知识就必须由已有的知识出发。对于已有的原始知识，亚里士多德认为可以分为有关事实的知识和有关字的意义的知识。他的证明理论主要是以当时的数学为典范，这是因为当时只有数学是发展得较完整的。这种证明理论对后来的欧几里得几何学很有影响。关于思维基本规律，亚里士多德没有明确地陈述过同一律，而对于矛盾律和排中律，则他在《形而上学》中有整整一卷加以论述。他对于这两条规律有时是作为有关事物的规律加以陈述的，有时则是作为有关思维的规律来陈述的。关于归纳法问题，亚里士多德的说法是不一致的。在《工具论》中有的地方讲的归纳法是指简单枚举法，而另一些地方讲的却是完全归纳法。他早期所讲的归纳法主要是简单枚举法，后来在创立了有关三段论的理论后，则又提出归纳法可以还原为三段论的说法。

总之，亚里士多德关于演绎逻辑的理论，特别是关于三段论的部分，直到今天也还有价值；而关于其他理论，比如模态三段论的理论虽然可能有些错误，但还值得进一步研究。亚里士多德在人类历史上第一个建立了系统的逻辑学说，因此被后人称颂为“逻辑学之父”。

（二）斯多噶派与伊壁鸠鲁派逻辑学说

古希腊的斯多噶派在命题逻辑方面很有贡献。他们将复合命题分为假言的、选言的与联言的。他们认为一个假言命题是由“如果，则”把两个命题联结起来而成的复合命题，而“如果，则”这一联结词的作用在于指出，第二个命题是由第一个命题得出的。他们还提出了假言命题的真假问题，认为一个假言命题是真的，当且仅当并非前件真而后件假，也就是说，一个假言命题只要不是前件真而后件假，就算是真的。因而当前件真后件真、前件假后件真或前后件都假时，一个假言命题都是真的。

亚里士多德与斯多噶派逻辑学说侧重于演绎问题的研究，而伊壁鸠鲁派逻辑学说却侧重于归纳问题的研究。伊壁鸠鲁派认为

自然规律应该利用归纳法来获得，主张"根据类似进行的推理"，即归纳法，是唯一的科学方法。斯多噶派对伊壁鸠鲁派提出若干批评，而后者又一一给予反批评。这种争论直到现在仍具有一定意义。

四　逻辑学的发展

在中世纪，由于宗教神学的束缚，中世纪的逻辑学发展很慢。但是我们应该看到：一方面，宗教神学把亚里士多德逻辑变成了僵死的经院哲学，而且对逻辑学本身的研究也是极其烦琐的。例如用大量篇幅去讨论范畴、属、种、谓词种类等问题，把各种判断进行排列组合，构成上百上千的判断形式，等等。所有这些都是中世纪逻辑的消极方面。但是，另一方面，中世纪基督教会创办的教会学校也普及了逻辑知识，出现了一些流传甚广影响甚大的逻辑课本，对形式逻辑体系化、教程化作出了贡献。例如，彼得·西斯班所著《逻辑大全》一书，仅在其后三百年间再版166次，作为中世纪逻辑学的最有价值的典型教科书广为流传。

同时，经院哲学也促使中世纪逻辑提出和研究了一些特有的逻辑问题。唯名论和唯实论关于共相的争论使得中世纪逻辑学家们在一般和个别这一逻辑问题的研究上深入了一步。亚里士多德《范畴篇》中的一些问题在中世纪得到了较多的研究；语义学问题、元逻辑问题也在中世纪提出并研究出一定的结果。中世纪在研究某些逻辑问题时兴起深究细索的学风，并且出现了某些符号逻辑的因素。

从16世纪以后是近代自然科学的创立时期。逻辑学领域在这一时期，一方面随着自然科学材料的积累，特别是实验科学的发展，直接导致以弗·培根为杰出代表的归纳逻辑的勃兴；另一方面，演绎逻辑也摆脱了中世纪封建神学的羁绊，并与数学相联系，有了较大的发展。由于笛卡尔、霍布斯特别是莱布尼茨及布

尔提出了一些崭新的逻辑思想，逻辑学开始进入发展的新阶段。

关于弗·培根的归纳逻辑。弗·培根（1561—1626）是英国哲学家、自然科学家、逻辑学家、历史学家和国务活动家。"英国唯物主义和整个现代实验科学的真正始祖。"①他认为，科学的任务是发现和发展新的东西，所以逻辑学应当成为发明的逻辑，发现的逻辑。他认为亚里士多德的"工具论"没有完成这个任务，因而他写了《新工具论》（1620年出版）。按照他的意见，这本《新工具论》就应当代替亚里士多德的《工具论》。他在书中系统地批判了经院哲学阻碍科学知识的各种偏见，称这些偏见为"偶像"（或"假象"）。培根断言，仅仅推倒偶像是不够的，还应该给人的理智以辅助的工具，教会人们达到真理的认识方法，这种方法就是归纳逻辑。

培根比较全面而详细地提出了归纳逻辑。为了发现某种现象的真正原因和本质，他主张：（一）考察事物的各种表现；（二）提供所缺乏研究的现象的例证，编制成差异表或缺乏表；（三）提供研究对象所出现的程度不等的例证，编制成比较表或程度表；（四）排除缺乏确凿根据的例证；（五）经过上述归纳过程，作出肯定的结论。经过第一批实验，证明这种归纳法到达真理的路程太长，并且不是都能达到可靠的结果。有鉴于此，培根对归纳法作了某些改进，使之缩短达到真理的途径。他指出，当被研究的对象以最明显、最纯真的形式出现时，以这些事实作根据，进行有特权的裁判。这种有特权的裁判，能迅速把偶然的东西从本质中清除出去。培根本人称这种裁判有将近30种。培根的这种关于有特权的裁判的想法，并未在实践中实现，但它对后来的英国逻辑学家约翰·穆勒（1806—1873）研究计算因果联系打下了基础。培根的逻辑学说的不足之处是，过高估计了归纳法

①见《马克思恩格斯全集》第2卷，第163页。

在认识中的作用，低估了演绎法的作用，从而割裂了思维过程的这两个不可分割的方面。他还低估了三段论的意义。他认为三段论是由命题组成，命题由语词组成，语词是观念的符号，“如果观念本身（这是根本的东西）是混乱的，并且由此抽出来的，则在其上层建筑中不可能有确定性”。但是培根却又利用三段论的正确性为自己的学说进行论述。尽管培根的逻辑学说有许多不足之处，但是他在逻辑学史上的贡献是应该给予肯定的。

关于莱布尼茨及布尔的数理逻辑。逻辑学发展到近代，便产生了在逻辑学中应用数学方法的思想。法国哲学家笛卡尔认为可以有一种普遍适用的方法来解决各种科学问题，他把这种方法叫作“普遍的数学”。英国哲学家霍布斯提出“逻辑学家则教人在字的推论方面进行加与减”，即思维“不过是计算（加与减）”。但是笛卡尔和霍布斯都没有尝试去建立新的逻辑。首先作这种尝试的是德国哲学家莱布尼茨和英国数学家布尔。

第二节　现代逻辑学的产生

在莱布尼茨（1646—1716）的逻辑思想中，下列几点是基本的：一、所有概念可以还原为少数的原始概念，这些原始概念构成“思想的字母表”；二、复合概念可以由原始概念通过逻辑乘法得出；三、原始概念彼此之间是没有矛盾的；四、任何命题都是谓项性的，也就是说，可以还原为一个谓项对于一个主项有所述说的命题；五、任何真的肯定命题都是分析命题，也就是说，谓项包含在主项之中。莱布尼茨企图在这个基础上建立一个逻辑演算。他最初用数目来代表原始概念，而逻辑运算则是算术中的乘法、除法以及去括号。后来改进为用素数代表原始概念，这样我们就可以通过分解因数的方法，将复合概念分解为原始概念。

例如，用“3”代表“能思维的”，“7”代表“动物”，则

“人”（能思维的动物）就可以用“21”来代表。也可以设“m”表示“人”，“a”表示“动物”，“t”表示“能思维的”。那么，“人”这一概念的定义可用方程式表示如下：$21 = 3 \cdot 7$或$m = a \cdot t$。利用这种表示方法，我们可以说如果一个全称肯定命题的主项是可以被谓项除尽的，它就是真的，因此全称肯定命题可以表示如下：$s/p = Y$或$S = P \cdot Y$。用类似的方法可以写出表示全称否定、特称肯定与特称否定等三种命题的式子。

由于莱布尼茨仍旧保留了对逻辑的内涵的解释，他在应用数学方法的过程中不断遇到困难。直到19世纪时英国数学家布尔（1815—1864）完全采用了外延的解释，这问题才得到完全的解决。（所谓对于一个词的“内涵的解释”就是将该词看作表示一种性质；而“外延的解释”就是将该词看作表示一个类。）布尔企图把代数方法应用到逻辑中去，在1847年出版了《逻辑的数学分析》一书。

布尔认为逻辑中最基本的东西是“类”，而逻辑可以看作类的演算。他发现对于类可以进行一些运算，例如可以从X与Y两个给定的类构造出第三个类Z，使得Z的分子恰好包含X与Y的分子，也可以从X与Y两个类构造出第三个类Z，使得Z恰好包含X与Y所共有的分子。这两种运算与代数的加法和乘法具有十分类似的性质。在布尔以前曾有一些人试图在逻辑中应用数学方法。布尔是第一个获得完全成功的人。他所建立的这种类的代数又称为“逻辑代数”或“布尔代数”，它是数理逻辑的早期形式。

如果说布尔以前的数理逻辑主要是用符号和简单的代数方法来处理传统逻辑的演绎理论，那么布尔之后的数理逻辑则主要是把初等数论和集合论等数学方法运用到逻辑上，使数理逻辑的发展取得了较大的突破。德国数学家弗雷格最先引进和使用了量词和约束变元，并完备地发展了命题演算和谓词演算，建立了第一个比较严格的逻辑演算系统。后来意大利数学家皮亚诺又正式利

用前人的命题演算和谓词演算成果来表述数学，推导数学。英国哲学家罗素又把皮亚诺关于命题演算和谓词演算这两部分最后搞完备了。根据这一成果，他和怀特海合著了《数学原理》一书(简称PM)。至此，传统逻辑中关于演绎推理的内容已经完全可以用两个演算的方法处理了。本世纪30年代，美国数学家哥德尔证明了不完全性定理；波兰逻辑学家塔斯基精确地定义了句子的真和假，建立了现代逻辑语义学；英国数学家图灵又建立了图灵机的形式理论。近年来由于电子计算机的发展，包括算法理论、递归函数和可计算性等在内的逻辑学的“算术部分”，被看成是高于其他部分的发展中的主流，迅猛地推动着现代逻辑的发展。现代逻辑的研究不仅直接影响到自然科学技术的发展，它还延伸到哲学、社会科学和其它人文科学等各个方面。

第三节　现代逻辑学的分类和子学科简介

人们只要深入和广泛地了解国内外现代逻辑的研究状况，就会发现：现代逻辑所涉及的范围领域极其宽阔，所出现的分支科目也极其繁多。但是从总体上看，它们主要分为基础理论逻辑和应用逻辑两大部分。当然这两大部分也不是决然分开的：在基础理论逻辑中虽然侧重于纯理论的探讨，但有时也要结合一些应用，只不过这种应用的目的在于增强对基础理论的阐述；在应用逻辑中也有相对的基础理论内容，而说其“相对”，因为它只是对纯理论逻辑某些局部的具体解释、增减和再构造，以适应于自身研究领域的需要。应该指出的是：现代逻辑对基础理论的研究主要侧重于演绎问题，又称演绎逻辑；当然现代逻辑也开始重视对归纳问题的研究，称作归纳逻辑，甚至可以说现代归纳逻辑常常是以演绎逻辑为重要工具的，而演绎逻辑只是在极个别处用到了归纳方法。还应该指出的是：现代演绎逻辑的研究主要侧重于

外延问题，又称外延逻辑(属于古典的标准逻辑)，但也开始重视对内涵问题的研究，又称内涵逻辑(属于非古典、非标准逻辑)。

本节在对现代逻辑进行分类的基础上进行一些科目简介，但随其特点和人们的需要不一而介绍得详略不同。这 个 分类 并没有、也不可能完全穷尽现代逻辑的所有分支科目，因为现代逻辑从总体上看还正在不断地分解与溶合、深化与泛化当中完善着自身，“分类”对它只能是相对而言。

我们先列纲目，然后具体介绍。

一 理论逻辑

（一）基础逻辑

1.标准逻辑

（1）命题逻辑

（2）谓词逻辑

2.非标准逻辑

（1)哲学逻辑

（2)模态逻辑

（3)多值逻辑

（4)模糊逻辑

（5)直觉主义逻辑

（6)相干逻辑

（二）元逻辑

1.逻辑语形学

2.逻辑语义学

3.逻辑语用学

（三）数学的逻辑

1.集合论

2.证明论

3.递归论

4.模型论

（四）归纳逻辑（概率逻辑等）

二 应用逻辑

（一）认识逻辑

1.知道逻辑

2.信念逻辑

3.问题逻辑

（二）实践逻辑

1.道义逻辑

2.优选逻辑

3.命令逻辑

4.行动逻辑

（三）科学应用逻辑

1.科学逻辑

2.技术逻辑

3.发明逻辑

4.时间逻辑

5.空间逻辑

6.部分与整体逻辑

7.量子逻辑

8.电路逻辑

（四）自然语言逻辑（祈使句逻辑等）

（五）特种逻辑（仅举几例）

1.信息逻辑

2.控制逻辑

3.超协调逻辑

4.悖论逻辑

5.组合逻辑

现按上述纲目，作如下简要介绍。

一　理论逻辑（也称数理逻辑、符号逻辑或数学逻辑。理论逻辑的称谓最初见于希尔伯特和阿克曼所著《理论逻辑原理》一书。在现代逻辑中，理论逻辑是与应用逻辑相对而言的，它是从最抽象的层次上运用形式化方法直接或间接地研究人类思维结构及其规律的科学，因此它也是一种“纯逻辑”。）

（一）基础逻辑（也称对象逻辑，它主要是对元逻辑而言的。基础逻辑是以人类思维作为研究的直接对象，运用形式化方法研究其结构及规律。）

1.标准逻辑（也称经典逻辑或古典逻辑，它所以被名之为“标准”、“经典”或“古典”，是因为它以传统的亚里士多德逻辑为基础，重在外延和演绎方面的形式化研究。虽然它的基础范围是古典的，但是它的实际内容却远远超过了传统的亚氏逻辑。标准逻辑由弗雷格、罗素等直到哥德尔已基本告成。）

（1）命题逻辑（也称语句逻辑、联结词逻辑或真值函项逻辑，它是研究以简单命题〔或称原子命题、基本命题〕为基本单位、由真值联结词所构成的复合命题的逻辑特征及其规律的逻辑演算的理论。它的显著特点表现为它在考察和研究逻辑结构的形式时，是把一命题只分析到其中所包含的简单命题为止，不再把简单命题中的非命题成分如主词、谓词和量词分析出来。）

（2）谓词逻辑（也称量词逻辑或命题函项逻辑，它是把简单命题剖析为主词〔或个体、客体〕、谓词和量词，来研究命题的形式结构、推理规则的逻辑演算理论。谓词逻辑有狭义和广义之分，其主要区别是：在狭义谓词逻辑中，量词仅用于个体变项，而在广义谓词逻辑中，量词不仅用于个体变项，也用于命题变项

和谓词变项。有人把词项逻辑或三段论逻辑、关系逻辑等也都归入谓词逻辑。）

2.非标准逻辑（也称非经典逻辑或非古典逻辑，它是区别于由弗雷格、罗素等直到哥德尔所创立的古典逻辑。古典逻辑主要有如下问题：第一，古典蕴涵即实质蕴涵与人们心目中所谓的“推理”多少有些不同，或有些间隙。这些间隙可由“蕴涵怪论”表现出来；第二，不讨论命题的模态概念，如逻辑上的“必然”、“可能”等；第三，不讨论概念及命题方面的差异，比如一个命题的外延〔真值〕与其内涵〔意义〕的差别，而外延上等同并不一定内涵上等同；第四，不讨论涉及“知道”、“相信”、“应该”、“将来”等方面的语句，等等。以这些问题为研究的出发点，从20世纪初以来人们就不断构成各种新的逻辑系统。与古典逻辑重在外延问题的研究相反，非古典逻辑则重在内涵问题的研究。如下仅介绍非标准逻辑的几个主要分支；有人将知道逻辑、量子逻辑等也归此类，我们则暂且归入后面的应用逻辑。）

（1）哲学逻辑（研究关于逻辑的哲学问题。比如：究竟什么是逻辑？逻辑与非逻辑的划界标准是什么？是什么东西使一个形式系统成为一个逻辑系统？逻辑究竟是一元的还是多元的？逻辑与思维、语言、现实是什么关系？什么是有效性？什么是逻辑的真？怎样识别有效的推理或逻辑真命题？如何认识、避免或克服悖论？如此等等。此外，哲学逻辑还要研究逻辑上的一些基本概念，如各种联结词和各种量词的精确含义，语句、命题、判断的联系和区别，单称词项和摹状词理论等等。）

（2）模态逻辑（是研究由模态词所构成的模态命题及其推理的科学。“模态”一词是英语modal的音译，含有模型、情态等意思，因此“模态”一词既有音译又有意译的因素。模态词“必然”、“可能”等是模态逻辑的基本概念。在定义这样的概

念时，需要引人“可能世界”的概念，即凡不违反逻辑、能够被人们所想象的情况或场合，都是可能世界。因此：必然＝在所有可能世界中是真的，可能＝在某些可能世界中是真的。人们通常用符号□表示必然，用符号◇表示可能。可能和必然的真假关系是：$\Diamond p \longleftrightarrow \neg\Box\neg p$。模态逻辑是以前述命题逻辑和谓词逻辑为理论基础，因此又有模态命题逻辑和模态谓词逻辑；模态逻辑又是后述道义逻辑、时间逻辑等的理论基础，因此它们又称道义模态逻辑、时间模态逻辑等。人们又把包括前后所有内容者称为广义模态逻辑或非标准模态逻辑，而把只包括前者内容的称为狭义模态逻辑或标准模态逻辑。）

（3）多值逻辑（是研究大于二值〔真、假〕以上问题的逻辑。前述标准逻辑都是二值逻辑。后来为了解决亚里士多德关于未来偶然性问题，波兰逻辑学家卢卡西维茨提出了三值逻辑，认为命题或真，或假，或中立。美国逻辑学家波斯特也独立建立了多值逻辑，但他的出发点是纯形式地考虑，即直接假定命题的真值数目大于2，从而建立了任意有穷多个值的逻辑系统。目前多值逻辑的定义尚没完全统一，大致有：①是研究三值、四值以至可数无穷多值的命题之间关系的逻辑；②是命题值为两个以上〔任何有穷和无穷多个值〕的逻辑演算的总和；③是以n〔$n>2$〕个相互排斥的命题值为出发点的逻辑理论的总和；④是研究可以有任何有穷多和无穷多真值的命题的逻辑演算、演算的性质和演算之间的关系。）

（4）模糊逻辑（也称弗晰逻辑，它是一种运用取无穷多连续值的模糊集合来研究模糊性思维〔如“胖、瘦、快、慢”等〕、语言形式与规律的科学。模糊集合是一种不同于真假二值的模糊性的值的集合，它是以有穷或可数无穷连续值，亦即多值逻辑为依据的。因而，模糊逻辑是多值逻辑领域里的一个方面。模糊逻辑也是将模糊数学应用于逻辑领域。1965年美国学者查德

提出模糊数学理论，利用隶属度与隶属函数来刻划模糊性，后来又把这些基本概念和方法运用到逻辑领域中，提出模糊的逻辑变量、语言变量和逻辑函数〔公式〕这样一些概念。因此，可以把模糊逻辑看作是模糊数学与多值逻辑相结合的一种新的非标准逻辑。）

（5）直觉主义逻辑（是现代逻辑三大学派之一的直觉主义者所主张的逻辑理论。现代逻辑学家在解决悖论和数学基础问题时形成了三大学派：以罗素为代表的逻辑主义派，以希尔伯特为代表的形式主义派，以布劳维尔为代表的直觉主义派。逻辑主义派主张逻辑先于数学，数学建立在逻辑的基础之上。形式主义派则认为逻辑不是数学的基础，应该同时建立逻辑和数学系统，而构造这些演绎系统必须采用公理化方法。直觉主义派则认为只有人们的直觉或直接感知才是人们认识的根本来源，因此，数学只是来源于人们“直觉的先验形式”，通过这种先验直觉才构造出各种数学推理，而当人们回溯各种数学推理时就能发现其中的逻辑法则，从而产生逻辑。所以数学先于逻辑，逻辑产生于数学。）

（6）相干逻辑（也称相关逻辑，是关于相干蕴涵的逻辑。相干蕴涵是顾及命题在内容上联系的一种联结词。在古典逻辑中的实质蕴涵只反映命题间的真假关系，因此出现所谓“蕴涵怪论”〔如“$(\neg A \wedge A) \rightarrow B$”，即假命题蕴涵任何命题，如“如果$2+2=9$，那么太阳发光”这样真的复合命题，前件命题和后件命题在内容上没有任何联系，被人认为是无意义的“怪论”〕。因此人们企图寻找消除怪论的理想的蕴涵理论，它不仅应当反映命题间的真假关系，而且应当反映命题在内容上的联系。相干蕴涵反映了可用命题变项的共同出现来表示出内容上的联系，即A相干蕴涵B的必要条件是：A与B有共同的命题变项。1959年美国学者安特逊和贝尔纳普建立的R系统就满足这一条件。我国林邦

瑾等人曾于80年代初建立了“制约逻辑Cm系统”。当时，张清宇副研究员已经发现、并写出了《制约逻辑Cm系统与相干逻辑R系统的等价性》一文〔后发表在《数学通报》1987年第2期），文中首先指出这两个系统的推理规则完全相同，随后证明了“R的公理都是Cm的定理”和“Cm的公理都是R的定理”这两个引理，从而得出定理：Cm系统跟R系统等价。）

（二）元逻辑（是与前述对象逻辑相对而言，它不是以人类思维作为研究的直接对象，而是以基本逻辑理论作为研究的直接对象，运用形式化方法研究基本逻辑演绎系统本身的性质特征。元逻辑可称“逻辑的逻辑”，因此只能说它是间接地研究人类思维问题。）

1.逻辑语形学（也称逻辑语法学或句法学，是关于形式系统的一种形式理论，它只分析公式之间的关系，而不考虑公式的使用者以及公式的所指。它研究系统的结构性质，如形成规则确定什么样的符号串是一个合式公式，变形规则确定什么样的合式公式能推出什么样的合式公式。它研究可证明性和可定义性，研究系统的协调性〔一致性、相容性或无矛盾性〕、完全性〔完备性〕、独立性、可判定性等，这都与证明论相关。）

2.逻辑语义学（是关于形式系统的一种意义理论，它只分析公式与其所指之间的关系即公式的意义，而不考虑公式的使用者以及公式之间的关系。它不仅研究系统中公式的意义，而且研究系统的解释，这与模型论相关。对于一般形式系统，我们用真、假值；对于逻辑演算，我们用有效性〔即在所有的可能世界或所有的解释中真〕、可满足性〔或有一模型，即在某一或某些解释中真〕。）

3.逻辑语用学（是关于形式系统的一种使用理论，它只研究公式与使用者的关系，而不考虑公式之间的关系和公式的所指。也有人主张它还得研究使用者与公式所指之间的关系。目前这门

学科还正在初起。）

（三）数学的逻辑（是研究“数学本身”的逻辑问题。所以称为“数学的逻辑”，是为了同人们对一般“数理逻辑”所称的“数学逻辑”相区分。数学的一个特点是它内容上的抽象性和逻辑上的严格性，对数学中特有的逻辑问题的研究，既丰富了逻辑学的内容，也促进了数学的发展。）

1.集合论（研究集合的性质、演算和公理系统的理论。直观上，集合可以理解为由任何对象汇集成的一个类，这个类也就是逻辑上所讲的概念的外延。所以集合论也是外延逻辑的数学理论。集合论的基础理论是逻辑代数，逻辑代数是现代演绎逻辑的早期发展形态，是代数化的逻辑。）

2.证明论（也称元数学，是研究并证明数学各部门或一些公理系统的协调性〔一致性、相容性或无矛盾性〕的理论。其中最有名的是希尔伯特方案，即把整个数学、包括其公理及推理规则全部公理化，写成符号系统，再舍弃其内容而只把数学看作一符号系统，然后用有穷方法证明这个符号系统的协调性。）

3.递归论（也称递归函数论或能行性理论，它主要是用数学方法研究“可构造性”或“能行过程”的学科。递归论制定了可计算性的精确概念。1936年图灵引进了抽象计算机的概念，给“可计算函数”提供一个观念的定义，即一个函数是可计算的，当且仅当它在一台抽象计算机〔图灵机〕上是可计算的。）

4.模型论（是研究形式系统中真这个概念的可定义性，研究形式系统与数学模型之间关系的理论。如果某些事物及其关系满足某个公理系统，则这些事物及其关系便称作该公理系统的模型。如果某些事物必须先承认理论A然后才能满足某公理系统，便说这些事物是在理论A之下的某公理系统的模型。例如，在承认实数系统之后作出了欧氏几何的模型。如果能作出某公理系统的模型，此公理系统就是协调的。证明系统的协调性和公理的独立

性，最重要的工具便是构造模型。）

（四）归纳逻辑（也称或然性逻辑，是以个别或特殊的事实为前提，得出一般或普遍性结论的逻辑系统。其前提虽然是真实的，但结论不能确保其真实。传统归纳逻辑要研究归纳推理、类比推理、因果确定等问题。现代归纳逻辑的特点主要是运用数理逻辑与概率理论，对归纳方法进行形式化和数量化的研究，因此也称概率逻辑。）

二　应用逻辑（是指上述理论逻辑或符号逻辑在某种具体学科领域的应用中所形成的逻辑系统，我们也称之为“现代应用逻辑”。如果在某种具体学科领域只是对传统形式逻辑进行应用，那么它所形成的逻辑只能称作“普通应用逻辑”。我们将要介绍的属于前者。）

（一）认识逻辑（是以传统认识论所研究的概念和范畴为对象的逻辑理论，它们与知识的获得、接受、传递及对于某一知识的态度〔疑问与断定〕等有关。）

1．知道逻辑（是关于“知道”的一种模态逻辑。有关“知道”的命题大体上有两种：“P知道p是真的”与“P知道p是否真的”。人们通常用P：p表示前者，用P! p表示后者，从而构造出“知道”的模态逻辑系统。）

2．信念逻辑（也称相信逻辑，是以逻辑演算为工具，研究关于“信念”问题范围内的逻辑问题。某一个信念，可以看作是一个人同他所接受的某个论题之间的关系。假定有一个人x，我们把x的信念的集合记为Bx，“x相信P”记为“P∈Bx”。信念逻辑就是研究这样的逻辑关系，以及以这种关系为基础的逻辑推演。）

3．问题逻辑（也称问句逻辑，是用逻辑演算研究在问题和答案的范围内所产生的各种逻辑问题。它研究问句的分类，问句

之间的真假关系以及问句的推理形式。）

（二）实践逻辑（是研究人的主体行为中涉及某些哲学原理、伦理关系、志趣愿望等概念和范畴的逻辑理论，诸如权利和义务、应该、允许、禁止、需要与要求、决定与选择、动机、效果与行动等问题。）

1. 道义逻辑（也称义务逻辑或规范逻辑，是研究具有规范模态〔“应该”、“允许”、“禁止”等〕命题之间关系的逻辑理论。通常用Qp表示应该p，用Pp表示允许p，Fp表示禁止p,并着重研究各种规范命题之间的推演关系。）

2. 优选逻辑（是研究人们的决定与选择问题的逻辑理论。人们的实践总希望能选择最简办法而取得最多成果，通常借用数学上寻找函数极值〔极大或极小〕的办法。优选逻辑也有类似研究。）

3. 命令逻辑（也称指挥逻辑，是以逻辑演算为工具研究命令句之间的逻辑关系的理论。任何一个命令句总是同一个由它变形而来的将来时态的命题相关的。例如，“合上书本！”总是相关于“书本被合上”这个命题，后者称作命令的归结命题。为了判定命令句推理的有效性，把这种推理化为由归结命题组成的推理是否有效。）

4. 行动逻辑（是研究人们动机、效果与行动中各种相应命题关系的逻辑理论，如怎样的行动可以使动机与效果达到一致。）

（三）科学应用逻辑（也有人突出称为“物理学应用逻辑”，它主要研究将现代基础逻辑应用于实证的自然科学领域的问题。至于在社会科学领域，则尚待进一步开发。）

1. 科学逻辑（是运用逻辑理论来分析科学知识体系的逻辑理论，它主要探讨：科学理论的逻辑结构，自然科学、社会科学和技术科学的归纳与演绎等推理形式，科学研究的程序和逻辑推

演过程以及有效性的逻辑标准，科学理论中的心理学、认识论、方法论等内容，科学的人工程序化语言的结构问题等等。）

2．技术逻辑（是研究如何将逻辑应用于各种技术系统和结构的问题，特别是应用于自动化机器的综合分析。它是以逻辑演算为基础，其中特别是逻辑代数。它把命题演算是作为事件〔事实〕的计算来解释的；谓词演算则作为包含事件的函数的计算来解释的。其中已发事件相应于真命题，未发事件相应于假命题。）

3．发明逻辑（过去也称为发明技巧，是专门研究科学发明阶段的逻辑问题的，但是原来的研究并没有超出传统形式逻辑范围，而现代研究则要借助符号逻辑的方法手段，并同科学实验相结合。）

4．时间逻辑（是以逻辑演算为工具来研究时间上不定的语句之间的逻辑关系，其目的是把时态语句形式化，并把包含这种语句的推理形式化，以便更加精确地把握这种时态语句中的逻辑内容。时间逻辑系统也包括语法的构造和语义的构造两种。）

5．空间逻辑（也称拓扑逻辑，是涉及拓扑空间问题的逻辑理论。拓扑空间是欧几里得空间的一种推广，其中闭性或极限的概念是用集合之间的关系而不是用距离来描述的。当几何图形在一对一的双方连续变换之下存在不变的性质时，此性质称为拓扑性质。例如，画在橡皮膜上的图形当橡皮膜扭曲变形而不破裂时，如曲线的闭合性、相交性等不变的性质就是拓扑性质。）

6．部分与整体逻辑（是在传统哲学本体论中部分与整体等概念基础上构造的所谓“部分学”理论，目的在于避免和克服罗素悖论，并已被广泛应用于事件理论、生物学、音韵学等领域。这里的哲学本体论是关于系词“is”〔是、存在〕的科学，是一个名称逻辑系统，它也是由初始符号、形成规则、变形规则和公理组成的形式系统。）

7．量 子 逻辑（也称微观宇宙的逻辑，是关于微观客体的研究中、量子力学的研究中推理等问题的逻辑。它除了引进真的和假的命题之外还引进真假不定的命题。其中除了排中律之外，其他传统逻辑的规律都能应用。）

8．电 路 逻辑（也称开关逻辑，是用逻 辑 代 数的“真”、“假”值原理构造电子器件的“开”、“关”状态，并形成控制电流的“通”、“断”的电路。电路逻辑所解决的开关电路是脉冲技术中的重要电路。）

（四）自然语言逻辑（也称自然逻辑，是研究日常自然语言的逻辑问题。自然语言是相对于人工语言而言的，是一些在特定情况下自然形成的语词指号系统，如汉语、英语等，它们具有指谓性和交际性。传统古典逻辑只由语言的指谓性研究命题的真假关系；而自然语言逻辑则不限于此。自然语言逻辑十分重视语境这一因素，注意考察交际中语词指号与意义的关系，研究各种语气的语句的推理、思维者与命题之间的关系，以及成功的交际，等等。它是介于语言学和逻辑学之间的边缘科学。它对自然语言的研究结合符号逻辑进一步深化，便形成条件句逻辑、祈使句逻辑等语句逻辑的分支学科。）

（五）特种逻辑（是一些正在形成的、尚不易归类的新兴逻辑学科。如下仅举一些例子，并没有也不可能穷尽这些学科，如价值逻辑、自由逻辑、半矛盾逻辑等就没有举出。）

1．信 息 逻辑（是在信息加工中使用逻辑方法的理论系统，它包括对被加工对象加以描述的信息语言、将有关自然语言变换为信息语言的规则以及逻辑推导的规则。因此，可以根据具体对象的特点建立相应的信息逻辑系统，以便通过一定的演算而从已获得的信息中能行地推导出新的信息。）

2．控 制 逻辑（是与控制论有关的逻辑概念、方法和系统构成的理论体系。控制论的奠基人维纳十分强调数理逻辑对于控制

论所起的基础理论作用。这是因为，任何一种控制系统在从输出端接收反馈信息后，必须根据输出值与目标值的差值，进行逻辑的判断和推理，作出决策，再将其相应信息加以输入，才能进行控制或调节。作为控制论技术工具的电子计算机在进行智能模拟时，也必须有进行相应的逻辑判断与推理的功能。当初，控制论基本思想的形成是和类比推理有关。逻辑代数与开关电路、数理逻辑与神经网络模型、递归论与自动机的能行性、模糊逻辑与模糊控制器等，都是控制逻辑中的重要内容。）

3．超协调逻辑（是研究一种既违反矛盾律〔$A\wedge\neg A$〕又承认矛盾律〔$A\vee\neg A$〕的逻辑问题的理论。“超协调”的定义是：假设$\models$为一个逻辑推导关系；$\models$是“爆炸性的”，当且仅当对于所有A和B，$\{A,\neg A\}\models B$〔如果二个矛盾命题都成立，则可推出任意命题，整个推理系统失效〕；如果$\models$不是“爆炸性的”，即$\{A,\neg A\}\not\models B$，则这个$\models$就是“超协调”的。据说这种逻辑能为不协调即包含矛盾的、然而并非无意义的理论提供逻辑基础。）

4．悖论逻辑（是专门研究产生悖论的根源、寻求克服悖论的方法和途径的逻辑理论。悖论是一种逻辑上自相矛盾的状况：肯定一个命题就得出它的矛盾命题；同时，肯定这个命题的否定，同样又得出它的矛盾命题。一般地，悖论分为逻辑悖论〔集合论悖论〕和语义悖论。）

5．组合逻辑（是关于数学中组合论逻辑问题的理论。它研究建立公式的逻辑体系和计算时的一些概念和方法。）

第四节　现代逻辑与传统逻辑的比较

一　传统逻辑的缺陷

正由于传统逻辑存在许多缺陷，现代逻辑才迅速地发展起

来。

传统形式逻辑有哪些不足呢？人们总结出如下几点。

（一）局限于主表式语句。主表式语句即“主语＋是＋表语”的结构，如“s是p”之类。传统形式逻辑所讨论的语句只局限于下列四种：全称肯定句（用A表示。如“凡S都是P”）、全称否定句（用E表示。如“凡S都不是P”）、特称肯定句（用I表示。如“有的S是P”）、特称否定句（用O表示。如“有的S不是P”）。并在这四种语句的基础上发展了三段论。但是人们日常所使用的语句决不限于主表式语句。例如，“我和他散步”，“他把书给了我”“3比2大”，“A喜欢B”等等。有些句子也可以改变成主表式语句，运用传统形式逻辑进行推理。但有许许多多的句子是无法作这种改变的。不是利用集合关系进行推理的场合，改变成主表式语句也没有用。传统形式逻辑所局限的主表式语句的研究，很难处理好其他形式如关系式语句的问题。

（二）局限于三段论。传统形式逻辑规定，每个三段论式必须有也只能有三个主表式语句，两个称为前提，另一称为结论。每个三段论式必须有也只能有三个名词，结论句的主语称为小词，谓语称为大词，而只出现于两前提之中的名词称为中词。这样的三段论式并不能包括日常的各种推理形式。例如下列推理：

亚洲大于非洲，非洲大于欧洲，所以亚洲大于欧洲。

很明显，这三个语句都不是主表式语句，都不合三段论式的要求，因此不是三段论。如果按照上文那样生硬地把它们都改成主表式语句，即写成：

亚洲是大于非洲的，非洲是大于欧洲的，所以亚洲是大于欧洲的。

这里就出现了问题，整个推理中共有四个名词（亚洲、非洲、大于非洲的、大于欧洲的），这就很不符合三段论式的要求。事实

上，上面的推理是根据“大于”这种关系的“可传递性”进行的，而不是根据三段论式的要求进行的。传统形式逻辑并没有研究“可传递性”等问题。

（三）对量词缺乏研究。逻辑学的“量词”与语法学的“量词”含义不同。逻辑学的量词是指称整体数量或部分数量的词。指称整体数量的词称作全称量词（如“任何”、“所有”等），指称部分数量的词称作存在量词（如“有的”、“一些”等）。虽然传统形式逻辑注意到量词的性质，并以“量”为标准将含有全称量词的语句称为全称命题，将含有存在量词的语句称为特称命题。但是，由于传统形式逻辑局限于主表式语句，更由于它没有“变项”的概念，以致量词的作用受到极大的限制。试举一例，近代数学中经常使用一些含有量词的语句，例如有名的关于数列a（n）的柯西判敛准则（见前引《数理逻辑初步》）：

任给一个自然数m，都有一个自然数n，使得对任何自然数p，q，都有 $|a(n+p)-a(n+q)|<\frac{1}{m}$。

人们可以不管这种语句的具体内容，只看其中许多量词都是在A、E、I、O形式之外大量使用的。这种语句能够用传统逻辑的全称命题、特称命题写出来吗？甚至根本无法写出；如果有谁硬要借助人为约定而用传统形式逻辑语句把它勉强表述出来，那也一定是十分费解的。

（四）使用自然语言（即日常语言）。传统形式逻辑使用的是自然语言，因而常有歧义。自然语言含义极为丰富，但却因而常由于一词多义而产生歧义，这对于逻辑的陈述来说是极为不精确的。例如对直言命题中联项“是”的使用就有如下几种不同含义，具体说比如：

1．老舍是《四世同堂》的作者；

2．老舍是小说家；

3．小说家是文学家。

上面三个命题中的联项“是”的使用含义是完全不同的。命题1中的“是”表示“等同”关系，“是”前后的两个词项可以互换位置，也可以说“《四世同堂》的作者是老舍”。命题2中的“是”表示的是分子与类之间的“属于”关系，老舍是小说家这个类中的一个分子。命题3中的“是”又完全不同于前两个命题中“是”的使用，它表示的是两个类之间的“包含”关系，“文学家”这个类包含“小说家”这个类。由此可见，上述三个命题中使用“是”的不同含义是三种完全不同的关系。表示“等同”关系的“是”可以把前后词项互换位置，而表示“属于”关系和“包含”关系的“是”，绝不可互换“是”前后词项的位置，而说成“小说家是老舍”或“文学家是小说家”。传统逻辑对这三种情况不加区别，也就混淆了这三种不同的命题，当然也就得不出关于这三类命题的不同的正确逻辑规律。

比如“包含”关系是传递的（即如果A包含B，而B又包含C，那么A包含C），但是“属于”关系却不是传递的（即如果A属于B，B属于C，那么不一定就A属于C）。例如“祝福”是“鲁迅著作”这个类的一个分子，而“鲁迅著作”是“一天读不完的书籍”这个类的一个分子，但是“祝福”却不是“一天读不完的书籍”这个类的一个分子。因而如下形式的推理是错误的：

“祝福”是鲁迅的著作，

鲁迅的著作是一天读不完的，

所以，“祝福”是一天读不完的。

以上只是简单列举了传统形式逻辑的不足。一方面它不能包括一些明显正确的推理形式；另一方面，由于它使用自然语言，产生歧义和含混，因而不能对一些正确的推理进行充分的研究，并混淆一些不同的命题与推理。要使逻辑得到进一步的充分发展，就必须突破传统形式逻辑的框框，使用特定的不会引起歧义和含混的形式语言。对构成复合命题的联结词作科学的抽象，从

而对复合命题的逻辑规律作深入全面的研究；对量词作深入研究，从而掌握关于包含量词的命题的逻辑规律。

正由于传统形式逻辑暴露了许多不足，现代逻辑就应运而生。它不仅能够填补传统形式逻辑的不足，而且使整个逻辑研究跃入了一个崭新的理论阶段。比如，现代逻辑从总体上建立了推理形式的理论体系——命题演算和谓词演算。命题演算包括了与逻辑联结词（“非”、“且”、“或”、“如果、则”、“等值”等）有关的逻辑规律，其中包括假言推理、选言推理、联言推理和二难推理等。谓词逻辑包括了与量词（“所有”、“有的”）以及和关系命题等等有关的逻辑规律。亚里士多德的三段论便成了其中一个极小的部分。现代逻辑在建立了两个演算之后，又展开了元逻辑的研究，就是把逻辑系统本身作为逻辑学研究的对象，证明逻辑系统本身或与其有关的各种性质的定理。例如演绎定理，它是说：如果从A推出B，并且在推演过程中A里的自由变项保持不变，那么就可以推出：A实质蕴涵B（如果A则B）。演绎定理的用处极大，在日常推理和科学推理中都要用到。我们大量应用假设推理，即假设前提A真，经过一系列推论，推出一个结果B，则可得“如果A则B”的命题。这种推理的根据就是演绎定理。

总之，现代逻辑在命题的种类、推理的结构、推理的体系和元逻辑等方面都丰富和发展了传统形式逻辑。现代逻辑远比传统形式逻辑更精确、丰富、完备和深刻。

二　形式逻辑、数理逻辑和辩证逻辑

形式逻辑（即前述“传统形式逻辑”）是一门以思维形式及其规律为主要研究对象，同时也涉及一些简单的逻辑方法的科学。数理逻辑是用数学方法和符号工具来研究形式逻辑和数学问题的科学。辩证逻辑就是研究人们认识真理的过程中思维运动发展的

形式及其规律的学说，即关于辩证思维的形式及其规律的学说。

从总体上看，形式逻辑和数理逻辑带有更多的统一性。德国逻辑学家肖尔兹认为数理逻辑是“形式逻辑的现代类型”，美国数学家哥德尔认为“数理逻辑不外是形式逻辑的精确的和完全的表述”。然而，形式逻辑和数理逻辑之间也有明显的不同点，大致说来有：

（一）研究对象不完全相同。形式逻辑的有些研究对象，如归纳、类比和假说等，就是数理逻辑所尚未充分研究的。同时，数理逻辑的有些研究对象，如一个公理系统的完全性与无矛盾性，就是形式逻辑所不研究的。即使有些对象是形式逻辑和数理逻辑都研究的，它们研究的侧重点也还是有所不同。

（二）研究方法不同。形式逻辑用日常语言来表现思维形式及思维形式之间的关系。例如，用“所有S都是P”与“如果p则q”来分别地表现全称肯定命题和假言命题。这里的“所有…都是…”与“如果…则…”就是日常语言。为了避免日常语言的歧义和其他不确定的因素，数理逻辑应用了形式语言（或说人工语言、符号语言）来构造逻辑系统。例如，数理逻辑应用公式(x)（Fx⟶Gx）和（p⟶q）来分别表现全称肯定命题和假言命题。符号x，p，q，F，G，⟶等，其意义在形式语言中都是明确规定的。此外，形式逻辑所用的方法都是比较直观的，而数理逻辑则大量地应用形式化的数学方法。

（三）在思维形式研究的若干方面，数理逻辑比形式逻辑更有成效。比如对演绎推理问题，可以说形式逻辑是采取孤立跳跃式的研究方法，而数理逻辑则采取系统连贯的研究方法，后者更带有深刻的意义。因此形式逻辑应当根据本身的特点，适当地吸收数理逻辑的某些研究成果，以充实自身的体系。

如果说形式逻辑和数理逻辑带有更多的统一性，那么它们跟辩证逻辑就带有更多的差异性了。仅以形式逻辑来说，它与辩证

逻辑的不同点大致有：

（一）形式逻辑只从思维形式方面研究思想本身的准确性、明确性、无矛盾性和一贯性。它并不研究思维形式如何正确反映客观现实的运动、变化和发展问题。而辩证逻辑却要研究这些问题，它要研究思维形式如何正确反映客观事物的运动变化，如何反映事物的内部矛盾、有机联系和转化等问题。

（二）形式逻辑只从真假值的角度，研究各种思维形式之间的真假关系，就是说，形式逻辑只研究当具有某一个思维形式的思想是真的时候，具有另一个思维形式的思想是真的或是假的。形式逻辑不研究各种思维形式在认识发展过程中的联系和转化问题。而辩证逻辑却要研究这些问题，要研究人们的判断如何从个别上升到特殊，再上升到一般。

（三）在形式逻辑中，各种思维形式之间的关系只是真假值的关系，而不表现认识发展的顺序和认识深化的程度。在这个意义上，形式逻辑中的各种思维形式可以说是平列的。相反地，辩证逻辑考虑到各种思维形式在认识发展过程中的联系和转化，从而把各种思维形式互相隶属起来，组成一个由低级到高级的有机体系。

总之，形式逻辑和数理逻辑都属于工具性的思维科学，其内容带有更多的形式科学特点；而辩证逻辑却属于认识论的理论科学，其内容带有更多的哲学科学特点。

三　数理逻辑和数学逻辑

前面说过，从莱布尼茨之后，现代逻辑出现了沿着数学方向前进的倾向。但是在这种共同倾向当中还有两种情况：一种是“应用数学方法”的逻辑研究，人们从广义上把它称为“数理逻辑”或“符号逻辑”；另一种是“关于数学本身”的逻辑研究，人们又从狭义上把它称为“数学逻辑”。这两种情况在实际发展

中又有很不容易划分的联系，它们密切交织在一起，因此人们都统称它们为“现代逻辑”或“数理逻辑”。但是，认真区分这两种情况还是很有意义的。

先谈“应用数学方法”的逻辑研究。效法数学可有两种方式：一是逻辑学只采用数学的方法，而制定逻辑学所特有的仿照数学样式的符号来表现概念或思维的演算，并建立不依赖于数学的系统；二是逻辑学直接地借用数学的符号，并在建立逻辑系统时，对于那些数学演算（如相加、相乘等）作相应的修改，或给予新的解释。前者可称为严格意义的符号逻辑，似应成为现代逻辑发展的主要方向；而后者，如布尔代数，在某种意义上乃是普通代数在逻辑领域的应用。但两者的共同特点都是把数学作为逻辑的工具，立足于逻辑而又借助数学方法解决演绎推理的逻辑问题。在“应用数学方法”当中，也仍有或者是模仿以及借用几何学符号，或者是模仿以及借用代数（算术）符号的区别。而在这两者之中，借用几何学符号似更为古老。这种方法后来被普遍地部分用于表述概念的外延，部分用于表述推理形式中概念间的关系，如欧拉图解和文恩图解就是实例。

我们知道，最早是莱布尼茨提出用数学方法研究思维的设想，后来是布尔等人用代数方法处理逻辑问题，建立了逻辑代数。但逻辑代数所能处理的逻辑问题与亚里士多德逻辑还没有本质上的不同。1879年，弗雷格建立狭义谓词演算，完成了建立命题演算和狭谓词演算这样两个逻辑演算的工作，这在逻辑发展史上实现了一次质的飞跃。不仅在科学内容上比起传统的亚里士多德逻辑大大地发展和丰富了，而且在科学性上也把逻辑学提高到一个新的高度，建立起逻辑学的完整科学体系。20世纪20年代，逻辑学家证明了两个逻辑演算的一致性，表明应用这些逻辑规律进行推理是可靠的，不会产生逻辑矛盾。1930年，著名数理逻辑学家哥德尔证明了狭谓词演算的完全性，表明数理逻辑的两个逻

辑演算已经完全地反映了演绎推理的规律。

再说“关于数学本身”的逻辑研究。

这种研究是立足于数学，把逻辑当作数学的工具，借助逻辑的基本概念与原理，以解决数学问题（如数学基础等问题）。这在某种意义上乃是现代逻辑在数学领域的特殊应用，并且日益发展为数学的分支。数学的一个特点是它的抽象性和逻辑上的严密性，每一条数学定理都要求有严格的逻辑证明，对数学中特有的逻辑问题的研究，既丰富了逻辑学的内容，也促进了数学的发展。在这一方向下，数学逻辑又分为四个分支：集合论、递归论、证明论和模型论。

集合论的产生和发展有着深刻的数学背景。集合是数学的最基本的概念之一，从逻辑上分析和澄清集合概念，对数学的研究和发展有很重要的意义。从逻辑角度来说，集合论是外延逻辑的数学理论。这个领域中的最重要的成果是哥德尔（1938）和柯恩（1963）分别证明的连续统假设和选择公理相对于普通集合论公理系统的一致性和独立性。集合论是当前数理逻辑研究很活跃、发展很迅速的一个领域。证明论是由著名数学家希尔伯特提出的，其目的是研究并证明各种数学理论的一致性（无矛盾性）。就逻辑学来说，它是研究数学证明的理论，研究数学证明的规律。递归论是研究可计算性的理论。递归论制定了可计算性的精确概念。1936年，英国数理逻辑学家图灵引进了抽象计算机的概念，给“可计算函数”提供一个精确的定义：一个函数是可计算的，当且仅当它在一台（图灵定义的）抽象计算机上是可计算的。模型论是分析形式系统中的真的概念，研究形式系统中真这个概念的可定义性，和研究形式系统与数学模型之间的关系。

本书作为现代逻辑，主要是侧重于“应用数学方法”的介绍。事实上，现代逻辑“关于数学本身”的逻辑研究应该主要属于数学专业工作者的任务，而非数学专业（特别是文科专业）学

习现代逻辑则主要是学习“应用数学方法”的逻辑。

第五节 学习现代逻辑的意义和方法

学习现代逻辑的意义很多，我们只讲如下三点：

一、培养人们的思维能力，帮助获取新的知识。现代逻辑高度抽象和严密精确的形式系统，是训练、培养人们的抽象思维能力和提高思维水平的一个重要方法。比如命题演算和谓词演算系统，都需要我们一层一层地分析、理解和把握，并要求运用自如以解决新的问题，在这当中实际上也增长着我们的逻辑思维能力。现代逻辑还是由已知到未知的认识方法，它有助于我们获得新的知识。这种情况对于归纳推理比较明显，但是一般地说，演绎推理的结论虽然已经客观地包含在前提中了，而通过推理还是可以使认识由已知达到未知。

爱因斯坦曾经出过一道题，叫“土耳其商人和帽子的故事”。内容如下：一个土耳其商人要测试他那两个助手谁聪明，于是把他们带进一间黑屋子。他说：“桌上有五顶帽子，两顶是红的，三顶是黑的。我们每人摸一顶戴在头上，剩下两顶我藏起来，然后打开灯，请你们猜自己戴的是什么颜色帽子。”开灯后，助手们都看到商人戴的是红帽子。过了一会儿，其中一个助手喊道：“我戴的是黑帽子！”

他是怎样猜对的呢？这里就有一个演绎推理问题。用p表示“商人戴红帽”，用q表示“我戴红帽”，用r表示“对方肯定自己戴黑帽”，用s表示“我戴黑帽”，再用∨，∧，¬，⟶分别表示“或”、“与”、“非”、“则推出”。因为红帽子只有两顶，故产生以下一系列推理过程：

①p（商人戴红帽。）

②p∧q⟶r（如果商人和我都戴红帽，则对方会肯定自己

戴黑帽。）

③$\neg r \longrightarrow \neg(p \wedge q)$（如果对方不肯定自己戴黑帽，则不会是我和商人都戴红帽。）

④$\neg r$（对方迟疑不定。）

⑤$\neg(p \wedge q)$（所以不会我和商人都戴红帽。）

⑥$\neg p \vee \neg q$（或者商人未戴红帽，要不然就是我未戴红帽。）

⑦$\neg\neg p$（不是商人未戴红帽。）

⑧$\neg q$（故不是我戴红帽。）

⑨$\neg q \longrightarrow s$（如果我没戴红帽，则我戴黑帽。）

⑩s（我戴黑帽。）

对上面这些符号和运算式现在不懂不要紧，后面我们还要详细解说。

但从这个生动的例子能看出人们经过演绎推理，是能够从已知达到未知的。在数学这样的学科中，特别广泛地运用着演绎推理。其他各种科学，包括哲学社会科学，也都必须运用推理来从已知推出未知。

二、为学习和掌握现代科学打下逻辑思维的基础。现代逻辑要研究语言形式，就必须把自然语言符号化，从而为建立计算机用的语言提供了基础。人工符号语言系统可以用来表达计算机中的符号系统。计算机需要精确的语言模型，即把自然语言改造成为现代科学的演绎系统。现代逻辑的逻辑演算中的公式就是自然语言的模型，这些公式是按照一定的形成规则构成的，形成规则就是自然语言的语法模型。在逻辑演算中，由一些已知公式，按照推理规则（变形规则）进行推演而得到另一些公式．推理规则就是在自然语言基础上进行逻辑思维的逻辑规律的模型。可见，现代逻辑所研究的逻辑演算是自然语言的模型，它是我们学习和掌握现代科学的逻辑基础。

三、使人们更清楚地认识到：遵守逻辑规律的要求是正确地

进行思维的必要条件。现代逻辑是一种规范性的科学，它不能强迫人们永远符合它的规律的要求进行思维，但是违反了它的规律的要求的思维，总是不正确的。一切科学的认识或结论都必须表现为命题，而一切科学认识的产生和发展又都离不开推理，每一条科学原理的确定都离不开证明。现代逻辑从思维形式方面帮助人们进行正确的思维。掌握现代逻辑的基础知识，自觉地遵守和运用逻辑知识，就能使我们的思想更加严密、更加确切地反映客观实际，能使我们更准确地表达思想，有益于开展积极的思想交流。掌握现代逻辑基础知识对于学习各种科学理论和哲学理论也都是很有帮助的。

怎样学好现代逻辑呢？学好现代逻辑应该努力做到：

一、从基本概念、基本原理和基本运算开始，循序渐进地学习和掌握整体理论。比如，不理解“变项”、“联结词”、“真值”、“公式”等概念，就很难学好命题演算；不学好命题演算就很难学好谓词演算；不学好两个演算，就很难应付概率推理和模态推理的学习。因此在学习现代逻辑的时候必须有“一步一个脚印”的扎实作法，决不可以这里瞧瞧，那里翻翻，跳跃式地学习。

二、加强练习。现代逻辑是一门工具性科学，它需要人们的熟练性和技巧性。比如真值表的画法、公理推理方法、自然推理方法、哥德尔定理的证明方法等，都要在不断分析和不断练习中理解和把握。

三、理论联系实际。现代逻辑也是一门抽象性很强的科学，人们在学习当中应该抓住一些典型问题，分析它在实际运用中的情况。人们不可能把每条定理、每条原则都和具体实际联结起来，但是总可以找到一些典型问题进行联系，目的是加深理解现代逻辑的意义，找到实际应用的方向。

本书在写作中尽量将现代逻辑的若干基础理论写得简要而全面一些，并向人们初步提供在学习中需要了解的若干常识内容。

第二章 命题逻辑

命题逻辑是现代逻辑的基本组成部分，也称“联结词逻辑”。它是研究以简单命题为最基本单位，由真值联结词（如“或者”、“并且”、“如果，则”等）所构成的复合命题的逻辑特征及其规律的逻辑理论。命题逻辑的显著特点表现为它在考察和研究逻辑结构的形式时，是把一命题只分析到其中所含的命题成分，即简单命题为止，不再把简单命题中的非命题成分（主词、谓词、量词）分析出来。例如，对一个正确的假言推理：

如果所有动物血液都是红色的，那么世界上就不会有其他颜色的动物血液；然而世界上确有其他颜色（如绿色的）动物血液；所以并非所有动物血液都是红色的。

我们用p，q代表任何简单命题，那么上述推理过程就表示为如下的一般形式：

如果p，那么q

非q

———

所以，非p

在这里“如果p，那么q”就是一个复合命题，对简单命题p和q中的非命题成分（如p句的主词“动物血液”、谓词“是红色的”、量词“所有”，都是非命题成分）不需要做进一步分析，就可以表明推理的正确性。这是因为，它的正确性就在于前提和结论所反映的是事物的必然联系，而与其命题p和q形式的内部结构无关。通过这种分析所得到的关于复合命题的逻辑形式、规律以及在公

理化基础上所形成的命题演算，就成为命题逻辑研究的主要内容。

第一节　命题逻辑的基础理论

一　命题形式

（一）命题　先说什么是命题。命题是反映事物情况的思维形态。人们利用命题去反映事物有没有某属性，它是处在什么情况之中，不同事物情况之间又有什么联系等等。命题反映的事物情况可以相当简单，也可以很复杂。比如命题“2是偶数”，是对2有某种性质这样的事物情况的反映；命题“保定在北京与石家庄之间”，是对保定处在什么位置关系这样的事物情况的反映；命题“哪里有压迫，哪里就有反抗”，是对有压迫及有反抗之间有某种联系这样的事物情况的反映。命题这种思维形态还有真和假的区别。符合事实情况的命题就是真命题，不符合事实情况的命题就是假命题。假命题也是一种命题，比如“2是奇数”就是一个命题。

命题和判断既有联系又有区别。有些逻辑学著作把判断看作是一种思维状态，而命题是其语言形式。本书则采取如下的区别：判断是对事物情况有所断定的思维形态，是被断定者所断定了的命题；而一个命题能不能成为判断，是依具体的人是否有所断定而转移的。比如科学发展到今天，还不能最后确证火星上是否有生命。因此，一般来说我们不断定“火星上有生命”，也不断定“火星上没有生命”。“火星上有生命”也好，“火星上没有生命”也好，这些思想都还不是我们的判断，它们仅仅是命题。命题比判断更宽泛。由语句表达而未被断定的思想，都是命题；由语句表达而已被断定的思想，则是判断。所有判断也都可称作命题，但所有命题却不宜都称作判断。

命题的表达要借助于语句，但并非任何语句都直接表达命题。先看下面的例句：

（1）地球是太阳系中的一颗行星。

（2）地球是方的吗？

（3）我们要研究地球。

（4）地球多么大呀！

在这四个例句中，（1）是陈述句。它表达了一个思想，即反映了地球是太阳系中的一颗行星这样的事物情况。从语法方面来看，陈述句总是要陈述事物的情况，所以它直接表达命题。（2）是疑问句。它是对地球的情况提出了疑问，并没有直接反映地球的情况怎样，因此它不直接表达命题，而只是提出了一种疑问。（但是在某些场合下，事物情况是很复杂的，当听者或读者一定能够得出正确答案时，我们往往可以用反问的方式来表达一个命题。例如："难道地球是方的吗？"实际上是讲"地球不是方的"，这是一个否定性命题。）（3）是一个祈使句。它表示一种要求、愿望，并不直接反映地球怎么样，很难表达一个命题。它的基本作用是要求或禁止对方某种行动。（4）是感叹句。它是一种赞叹而不是直接反映事物，也很难表达一个命题。它的基本作用是表示说话者的感情。因此，我们所说的命题一般都指的是陈述句。

命题可分为两类：简单命题和复合命题。简单命题就是不再包含任何其他命题作为其组成部分的命题。例如"鲁迅是位文学家"是简单命题。复合命题则是包含有其他命题作为其组成部分的命题。例如"鲁迅写过《祝福》并且鲁迅写过《阿Q正传》"、"并非鲁迅写过《骆驼祥子》"等都是复合命题。复合命题的组成部分亦称复合命题的支命题。

任何一个命题总是非真即假的。命题的真或假统称为命题的真值。一个真命题的真值为真，一个假命题的真值为假。无论简

单命题或复合命题，其真假情况都由它们是否如实地反映了客观事实来决定。但是，除此之外，有的复合命题的真值还具有一种特殊的性质，即它们的真值都由其支命题的真值所决定。这样的复合命题，由于其真值是其支命题真值的一个函数，因而也称之为真值函项复合命题。当然，也有的复合命题，其真值并不取决于它的支命题的真值，比如“哲学家认为宇宙是无限的”这个命题，无论其支命题“宇宙是无限”是真是假，其原命题总是真的。这样的命题也称为非真值函项复合命题。现代逻辑一般将非真值函项复合命题划入“简单命题”，而现代逻辑所研究的复合命题主要是真值函项复合命题。

（二）命题形式　用自然语言陈述的各种具体命题，它们的内容丰富多样，数目多得无法统计。所有真命题的总和即人类知识的总和。逻辑学研究命题，主要是研究命题的形式结构和它们之间的逻辑关系（如真假方面的联系），而不考虑命题所表达的感情和具体事实等方面的意义内容。因此，特别是现代逻辑，将用一系列舍弃了具体意义和内容的符号来代表命题。在进行推理演算之始，用这些符号表示任一具体命题。演算出结果之后，又将符号译成它代表的那个具体命题。就是说，它们代表的具体命题是不确定的，因而在演算式中称之为“变项”。人们习惯上用英文小写字母

$$p, q, r, s, p_i, q_i, r_i, s_i \ (i=1, \cdots n)$$

作为命题变项，它们可表示任意命题。

命题演算式中除了变项之外还有所谓“常项”，就是指少数有特定含义的词。象“如果，那么”、“并且”、“或者”等就属常项。它反映事物之间或概念之间某种抽象的关系。它是逻辑学所要专门研究的概念，因此有时被称为逻辑概念，或逻辑常项。

真和假是命题最重要的一种性质。命题逻辑一般只考虑命题

的真假含义，不考虑命题的其他意义内容（如心理的，情感的内容等等），因而又叫做"二值逻辑"。

对于复合命题而言，光是将包含其中的简单命题表示成命题变项，还不能使命题完全符号化和形式化。为了使命题完全符号化，以便能更加形式化地研究命题的逻辑特性，还需要把命题常项即联结词符号化。

（三）命题种类　我们在这里简单介绍一下传统形式逻辑对命题的一般分类。人们首先把命题分为非模态命题与模态命题两大类，然后再作进一步的具体划分。

非模态命题，即凡不属于模态命题（断定事物情况的必然性或可能性的命题）的其他所有一切命题。它包括：

1．简单命题，即不包含其他命题的命题。又分：

（1）性质命题，即断定某事物具有（或不具有）某性质的命题。在性质命题中，表示某事物的那个概念叫作主项，表示某性质的那个概念叫作谓项。例如："中国是社会主义国家。"

①单称肯定命题，即断定某一个个别事物具有某性质的命题。例如："李白是我国唐代诗人。"单称肯定命题的一般形式是："这个S是P。"

②单称否定命题，即断定某一个个别事物不具有某性质的命题。例如："李白不是我国汉代词人。"单称否定命题的一般形式是："这个S不是P。"

③特称肯定命题，即断定在某类事物中有事物具有某个性质。例如："有的金属是液体。"特称肯定命题的一般形式是："有的S是P。"

④特称否定命题，即断定在某类事物中有事物不具有某个性质。例如："有的金属不是固体。"特称否定命题的一般形式是："有的S不是P。"

⑤全称肯定命题，即断定一类事物的全部都具有某性质的命

题。例如："所有金属都是导体。"全称肯定命题的一般形式是："所有S都是P。"

⑥全称否定命题，即断定一类事物的全部都不具有某性质的命题。例如："所有瓷器都不是导体。"全称否定命题的一般形式是："所有S都不是P。"

（2）关系命题，即断定事物与事物之间的关系的命题。在关系命题中有三个不同的成分：一是主项，即两个或两个以上相关的事物；二是量项，即限定主项范围的量度；三是谓项，即表示主项之间的关系。例如："凡二倍奇数都等于偶数。"

①二项关系命题，即指两个事物之间关系的命题。例如："河南省在黄河之南。"二项关系命题的一般形式是：aRb，或R（a，b）。

②三项关系命题，即指三个事物之间关系的命题。例如："尼泊尔在中国和印度之间。"三项关系命题的一般形式是：R（a，b，c）。

③多项关系命题，即指三个以上事物之间关系的命题。例如：$ax^2+bx+c=0$。多项关系命题的一般形式是：R（a，b，c，…，N）。

2．复合命题，即这种命题包含了其他的命题，并且它的真假决定于它所包含的其他命题的真假。

（1）联言命题，即断定几种事物情况都存在的命题。例如："他既聪明，又很用功。"联言命题的一般形式是：p并且q。

（2）选言命题，即断定在几个事物情况之中至少有一个事物情况存在的命题。例如："这件事或者你说错了，或者我听错了。"

①相容选言命题，即断定事物的几种可能的情况可以同时存在的命题。例如："他或者是个工人，或者是个学员。"相容选言命题的一般形式是：p或者q。

②不相容选言命题，即断定事物情况有几种可能性，而这些可能不能同时实现，只能有一种情况可以实现。例如："要么改革开放，要么固步自封。"不相容选言命题的一般形式是：要么p，要么q。

（3）假言命题，即断定某一事物情况存在是另一事物情况存在的条件的命题。例如："如果学习认真努力，那就会取得成绩。"

①充分条件假言命题，即断定某一事物情况是另一事物情况的充分条件的命题。充分条件是这样一种条件，有了它一定有某一结果，没有它不一定没有这个结果。例如："如果某数能被6除尽，那么它就能被2除尽。"充分条件假言命题的一般形式是：如果p那么q。

②必要条件假言命题，即断定某一事物情况是另一事物情况的必要条件的命题。必要条件是这样一种条件，没有它一定不会有某种结果，有了它不一定有这种结果。例如："只有能被2除尽的数，才能被6除尽。"必要条件假言命题的一般形式是：只有p才q。

③分充必要条件假言命题，即断定某一事物情况是另一事物情况的既充分又必要条件的命题。充分必要条件是指有了它一定有某一结果，没有它一定没有这个结果。例如："一个三角形是等边三角形，当且仅当它是等角三角形。"充分必要条件假言命题的一般形式是：p当且仅当q。

（4）负命题（命题的否定），即对某一命题所断定事物情况进行否定的命题。例如："并非曹操父子都是大军事家。"负命题的一般形式是：并非p。

以上都是非模态命题。下面说模态命题，它是指断定事物情况的必然性或可能性的命题。模态命题包括：

1. 必然命题，即断定事物与其属性的联系具有必然性的命

题。例如："社会主义制度终究要代替资本主义制度。"又如："任何生物都不可能离开空气而生存。"必然命题的一般形式是："S必然是P"或"S必然不是P。"

2．或然命题（可能命题），即断定事物可能性的命题，它并没有确切地肯定或否定对象具有（或不具有）某种属性，只是肯定或否定对象与性质之间的联系的或然性（可能性）。例如："这个生产计划可能实现。"或"这个生产指标不可能达到。"或然命题的一般形式是："S可能是P"或"S可能不是P。"

在现代逻辑中，对于复合命题及其推理形式主要放在命题逻辑中给以研究，对于简单命题及其推理形式主要放在谓词逻辑中给以研究，对于模态命题及其推理形式主要放在模态逻辑（还有概率逻辑、模糊逻辑）中给以研究。

二　命题联结词

在现代逻辑中人们要明确五种类型的词：命题词（常用p，q，r，s等表示）、逻辑词（又称命题联结词或真值联结词，主要有否定词¬，合取词∧，析取词∨，蕴涵词⟶，等值词⟷）、个体词（即个体变项，常用u，v，w，x，y，z等表示）、量词(包括全称量词和存在量词）、谓词（包括一元、二元和多元谓词等）。后三种词将在谓词逻辑中详细讲到。

我们知道，人们表述简单思想可以用简单命题，比如"刚果是东欧国家"、"刚果是中非国家"等。但是，要表述复杂思想却需要用复合命题了，这种复合命题不仅包括对简单命题的复合，而且包括对复合命题的再复合，以至多重复合。比如"并非刚果是东欧国家"，"如果并非刚果是东欧国家而且刚果是中非国家，那么刚果是热带气候"等。这样，在构成复合命题当中，就需要联结词发挥作用。联结词在现代逻辑中的意义和在自然语言中的意义并不完全相同。命题联结词是自然语言中的句子联结

词的逻辑抽象，它们只反映复合命题与部分命题之间的真假关系，舍弃了命题之间的内容联系。因此，命题联结词又叫做“真值联结词”。为了使命题完全符号化，并形式化地反映复合命题与部分命题的真假关系，现代逻辑分别用五种符号代表五个命题联结词(否定$\neg$,合取$\wedge$,析取$\vee$，蕴涵$\longrightarrow$，等值$\longleftrightarrow$)下边分别讨论这五个命题联结词的符号和它们所表示的复合命题与其部分命题间的真假关系。

（一）否定词“$\neg$”（“非”） 公式p的否定记作$\neg p$。显然，如果p是真的，那么$\neg p$就是假的；而如果p是假的，那么$\neg p$就是真的。我们可以用真值表说明这种情况（其中1表示真，0表示假）：

p	$\neg p$
1	0
0	1

当给定p的真值(即真、假值)时，根据上表就可以知道$\neg p$的真值。

（二）合取词“$\wedge$”（“且”） 用联结词$\wedge$把p和q结合成公式$p\wedge q$，就称作合取式。因为公式p和q中的每一个都可能是真的或假的，因此它们的真假组合有下述四种：p和q都是真的，p真q假，p假q真，p假q假。而一个合取式$p\wedge q$是真的，当且仅当p和q都是真的；而在其他场合里合取式$p\wedge q$的值都是假的。我们可以用真值表显示这种情况：

p	q	$p\wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

这里我们必须注意：逻辑学的命题真值关系与日常生活用语

中的真假判断有时会出现区别。例如，“鲁迅是文学家并且也是思想家”这一命题无论从逻辑学或生活语言判断，都是真的，因为它的两个支命题都是真的。但是象“鲁迅是文学家并且也是化学家”这样的命题，在日常生活中我们主张“一分为二”，说它是“半真半假”的，或“有真有假”的。而在逻辑学中有这样一个约定：一个命题只有一个真值，非真即假。这就是说逻辑学要求将复合命题当作一个整体进行真假判定，不存在什么“半真半假”的命题。上举命题中第一个支命题是真的，第二个支命题是假的，根据真值表的第二行可以判定它从整个看，是假的。

自然语言中的“而且”、“和”、“既……又”、“虽然……但是”等句子联结词的意义尽管跟“并且”的意义不尽相同，但是在真假定义上它们是一致的，因而也都可用合取词“∧”表示。需要指出的是：“∧”的一个特征是可交换的，即p∧q与q∧p有着相同的意义。但是，“并且”一词在自然语言的使用上，有时却包含有时间上连续性的意思，它往往与“而后”一词相当，因而是不能随意交换的。比如“他走进屋并且脱鞋上炕”，跟“他脱鞋上炕并且走进屋”，其意思是不完全一样的，不能同等使用。

（三）析取词“∨”（“或”） 我们用p∨q指称“p或q”，并且把它称作析取式。在这里“或”是在相容意下使用，它的含义是“至少有一个真”。因此，当p和q中有一个是真的，或者，p和q都是真的，p∨q就是真的；只有p和q都是假的时，p∨q才假。我们用真值表说明这些情况：

p	q	p∨q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$p \to q$是假的，当且仅当p是真的并且q是假的。（这是$p \to q$是假的唯一情况。）

我们可以用真值表显示：

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

观察上面真值表，可知$p \to q$在两种情况是真的：一种情况是p假；另一种情况是q真。因此归纳起来，$p \to q$意味着$\neg p \vee q$，这两个式子可以互相代换。以后我们随时会用到它。

例如，命题“如果语言是人们交流思想的工具，那么夸夸其谈的人就会成为世界上最富的人了”是假的，因为它的前件真而后件假。

在自然语言中可以用$p \to q$形式表示的有：如果p那么q，若p则q，假如p那么q，倘若p那么q，只要p就q，一旦p就q，当p的时候就q，p对于q是充分的，q对于p是必要的，只有q才p，q除非$\neg p$等。

为什么在蕴涵式中，前件假则后件无论真与假，该式都可成立呢？这里还要多说几句。

蕴涵式$p \to q$中的联结词$\to$称作实质蕴涵，也有称作真值蕴涵，或简称蕴涵。实质蕴涵跟传统形式逻辑进行推理时使用的自然语言“如果，那么”并不完全一致。其主要区别在于：推理中使用的自然语言“如果，那么”要求前后件有意义方面的联系或事实方面的联系。例如推理式“如果三角形三边相等那么该三角形三内角相等。”前件与后件就有意义方面的联系，后件命题实际寓含于前件之中。从前件成立可以推出后件成立。前件成立等于宣告

后件成立。又如推理式“如果你吃完这一大碗饭，你就不会再饿了。”前件与后件就有事实方面的联系。饱的感觉不能从吃饭推导出来，但实践经验将两者的因果关系建立起来了。推理式的前后件之间既有意义或事实的联系，当然又会有真值关系的联系。正确推理式的前件和后件都是真的。即使象“如果我是死人，那么我就不说话”这样的推理式的正面意思也是假定前件是真的，然后导出后件真。它背后意思是说，事实上前件假，所以后件不真。所以前后件有意义或事实联系的推理式，前件假则后件可真可假，整个推理式也或真或假。但是此处我们讲的前后件蕴涵关系只有一种真假依赖关系，而不管它们有无事实上或意义上的联系。$p \rightarrow q$就只是从形式上规定：它的成立意味着不允许p真而q假的情况出现，即$p \rightarrow q$在p真而q假的情况下是假的，在其它情况下（包括p假而q真或p假而q假）都是真的。这一约定在大多数情况下都给我们带来推算上的便利，但在极少数情况下也会产生所谓“蕴涵怪论”。关于“怪论”的问题现在不去管它，重要的是要逐步熟悉这种不问事实意义有无联系的蕴涵关系。例如，在常识范围里人们不能接受“如果2+2=5，那么北京是一个大城市”或“如果2+2=5，那么北京不是一个大城市”。从实质蕴涵的角度看，这类句子是无足为奇的。

（五）等值词“$\longleftrightarrow$”（“当且仅当”） 我们用$p \longleftrightarrow q$指称“p，当且仅当q”。$p \longleftrightarrow q$称作等值式。$p \longleftrightarrow q$是真的，当且仅当p和q都是真的或它们都是假的。其真值表是：

p	q	$p \longleftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

联结词$\longleftrightarrow$表示两边的命题有等价关系。凡是有等价关系的两个命题，它们互相蕴涵。从真假方面，$\longleftrightarrow$定义为：$p\longleftrightarrow q$是真的，当且仅当或者p和q均为真，或者p和q均为假；从蕴涵方面$\longleftrightarrow$定义为：$p\longleftrightarrow q$是真的，当且仅当$p\longrightarrow q$是真的而且$q\longrightarrow p$也是真的。

（六）关于联结词的够用性　以上我们讲了五个常用的命题联结词。事实上，如果只考虑简单命题和复合命题的真假关系而不考虑它们的其他内容的联系，那么凡是从真假方面把简单命题联结成复合命题的任何语句联结词，都可以归结为这五个常用的命题联结词。换句话说，这五个命题联结词对于组成复合命题、反映复合命题和简单命题之间的真假关系是足够的。

我们知道，等值$\longleftrightarrow$可以用蕴涵$\longrightarrow$来定义，而蕴涵$\longrightarrow$又可以用否定$\neg$和析取$\vee$来定义。数学常识告诉我们，一个函数，如果其本身的值是真值，其自变元所取的值也是真值，则此函数称为真值函项。于是我们可以证明：每个真值函项都是由包含联结词$\neg$，$\wedge$和$\vee$的命题形式所确定的函项。由于证明要涉及一些下文才讲的知识，这里将证明略去了。我们还可以指出，只需要$\vee$与$\neg$，或只需$\wedge$与$\neg$两个联结词就够用了。

三　命题函项

命题函项是命题逻辑中的重要部分。为了作整体理解，我们分几个层次来讲。

（一）关于公式　命题公式（也称命题形式）是由命题变项，或是由命题变项与命题联结词组成的符号式。例如，单独的命题变项，或它们的否定式、合取式、析取式、蕴涵式和等值式，都是命题公式。但是命题变项和命题联结词可以有各种组成方式，比如p和$\neg$既可以组成为“$\neg p$”，又可以组成为“$p\neg$”，那么到底哪个合乎要求呢？为此，我们作如下严格规定：

1.命题变项是原子公式，原子公式是公式；

2.如果A 和 B 是公式，那么$\neg A$、$(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A\longrightarrow B)$和$(A\longleftrightarrow B)$都是公式；

3.只有按上述两条所组成的式子才是公式。

根据这一规定，比如p、$\neg p$、q、$p\rightarrow q$等都是公式，而$p\neg$、$\rightarrow q$等就不是公式。

（二）关于函项　现代逻辑中的函项概念是从数学中的函数概念引入的。什么是函数呢？设有甲、乙两类，如果对于甲类中的每一个分子x，乙类中至多有一个分子y与它相对应，那么甲乙两类之间就存在着函数关系。如用f表示函数关系，我们有下列公式：

$$y=f(x)$$

在这里x称为自变元，y是对应于x的函数f的值。也有自变元不只一个的函数。函数是数学里的重要概念之一。在数学中函数关系常表现为一些运算，例如：加、乘、除等。函数里自变元所取的值不必是数值，函数的值也不必是数值，还可以是其他种类的值，例如真值。

在命题逻辑里，p、q等等代表任一命题，它们是命题变项。命题变项所取的值是真值。如果一个函数的自变元取的值是真值，函数本身的值也是真值，则此函数称为真值函数。有的逻辑学家认为把真、假二值叫作“数”总不大妥贴，改称为“真值函项”好。比如$p\wedge q$、$p\rightarrow q$等等都是真值函项。

命题形式的数目是无穷无尽的，但是在变项数目给定以后，真值函项的种类却是有限的。不同的命题形式可以表示相同的真值函项。比如$p\longleftrightarrow q$和$(p\rightarrow q)\wedge(\neg p\rightarrow\neg q)$是两个不同的命题形式，读者以后会知道，它们是相同的真值函项。真值函项的种类有多少，这决定于真值函项中所含的变项有多少，也就是决定于变项所代表的支命题有多少。这样的支命题的数目确定

了，各种可能的真假情况也就确定了。因之真值函项的种类也就确定了。

1.几个命题变项的真假情况

（1）设有二个命题变项p和q。在二值逻辑里，p和q的真值都各有二，真或假。当p真时，q或真或假。当p假时，q也或真或假。合起来二个命题的可能真假情况有四：p与q都真，p真而q假，p假而q真，p与q都假。用图表示是：

编　号	p	q
①	1	1
②	1	0
③	0	1
④	0	0

因此，有二个命题变项的可能真假情况为$2\times2=4$。

（2）设有三个命题变项p、q和r。同样，在二值逻辑里这三个变项都有真假二值，因此它们的组合情况如下：

编　号	p	q	r
①	1	1	1
②	1	1	0
③	1	0	1
④	1	0	0
⑤	0	1	1
⑥	0	1	0
⑦	0	0	1
⑧	0	0	0

有三个命题变项的可能真假情况为$2\times2\times2=8$。

（3）一般地说，有n个命题变项的可能真假情况为

$$\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{n\text{ 个}2}=2^n\text{（个）}$$

2.n个命题变项的真值函项

如前所述，n个命题变元可能有的真假组合是2^n个。对于每一个真假组合，又可以有两种断定：肯定和否定。对于2^n个组合，肯定和否定的组合共有

$$\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{2^n\text{个}2}=2^{2^n}\text{（个）}$$

其中每一个组合是一种真值函项的内容。所以，如果以n表示不同命题变项的个数，那么不同的真值函项有2^{2^n}个。

例如，设n＝1，那么真假组合有$2^1=2$，而真值函项的数目是$2^{2^1}=4$。用符号f（ ）表示真值函项，只含有一个命题变项的真值函项有$f_1(p)$、$f_2(p)$、$f_3(p)$和$f_4(p)$四种。我们用下表表示它们在变项p为真或为假时的真值。

p	$f_1(p)$	$f_2(p)$	$f_3(p)$	$f_4(p)$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

表中$f_1(p)$是指这样一类函项，不论命题变项p取何真值，其函项值总为真；$f_4(p)$则相反，不论p真假如何，函项值总为假；$f_2(p)$和$f_3(p)$则有时真有时假。

这四种真值函项都可以表示为相应的命题公式。$f_2(p)$是这样一个函项，当p真时它真，当p假时它亦假，因而其相应的命题公式就是p。$f_3(p)$则相反，当p真时它假，当p假时它真，它是对p的否定，应表示成$\neg p$。$f_1(p)$是取值恒为真的函项，其相应的命题公式是$p\vee\neg p$。$f_4(p)$恒取假值，其相应的命题公式是$\neg p\wedge\neg\neg p$。由此可见，不同的命题公式可表示相同的真

值函项。

再设n = 2，有两个命题变项p和q，则可能的真假情况有2^2 = 4，而真值函项的数目是$2^{2^2} = 2^4 = 16$。为简便起见，我们将f_i(p，q）写作f_i（i = 1，…，16），并列表如下：

编号	变项		函							项								
	p	q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
①	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
②	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
③	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
④	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

每一个真值函项都可以找到相应的表达公式即命题形式（尽管这种形式不是唯一的）：

f_1在p与q的4种真假组合的条件都是真的，它可表达为（p∧q）∨（p∧¬q）∨（¬p∧q）∨（¬p∧¬q）；（它相当于：p真q真，或者p真q假，或者p假q假。它穷尽无遗地列举了一切可能的真假情况，只要有一情况实现，它就是真的。因此，它是一个永真的真值函项。）

f_2在前3种p、q真假组合条件下才是真的。这3种情况可概括为p真或q真，因此可表达为p∨q；

f_3在第①、②、④3种情况下是真的。这3种情况可以概括为p真或q假，因此可表达为¬q∨p或者q⟶p；

f_4在第①、②两种情况下是真的。这两种情况可概括为p真而q或真或假，因此f_4可表达为p∧（q∨¬q）；

f_5照此类推，可表达为p⟶q；

f_6可表达为（p∨¬p）∧q；

f_7可表达为p⟷q；

f_8可表达为p∧q；

f_9可表达为$\neg p \vee \neg q$；

f_{10}可表达为$\neg(p \longleftrightarrow q)$；

f_{11}可表达为$(p \vee \neg p) \wedge \neg q$；

f_{12}可表达为$\neg(p \longrightarrow q)$；

f_{13}可表达为$\neg p \wedge (q \vee \neg q)$；

f_{14}可表达为$\neg p \wedge q$；

f_{15}可表达为$\neg p \wedge \neg q$；

f_{16}比较复杂，可表达为$\neg(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q)$，简化一下也可表达为$(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$。（表明不论p和q的真值如何，这个表达式永远是假的。）

总起来说，如给定n个变项，则不同的真值函项共有2^{2^n}种。从以上所举的例子可以看出，这些不同的真值函项可以再分为三大类：一类是永真的，即不论其中变项取什么值，函项的值总是真的，如f_1；一类是永假的，即不论其中变项取什么值，函项的值总是假的，如f_{16}；一类是综合的，即有时真有时假的，如f_2至f_{15}。

（三）公式分类

由于真值函项分为三类，所以各种命题公式也分为三类。

1．永真公式　不论所含的命题变项取什么真值，函项值总是真的真值函项是永真的真值函项，其相应的命题公式叫作“重言式”。比如，$p \vee \neg p$、$p \longrightarrow p$都是重言式，前者为重言析取式，后者为重言蕴涵式。重言式在真值表中显示的特点是：由其命题变项和部分命题所决定的整体命题在真值表最后一列的值都为真。例如，用真值表①证明$p \wedge q \longrightarrow p \vee q$是重言式：

---

① 解释一下。这个真值表左栏是p、q两个变项的4个真值指派，即4个可能的真假组合方式。右栏表示两个层次的函数相应值。例如第一行表示当p真且q真时，第一个层次的函数$p \wedge q$真，$p \vee q$也真。正因如此，由这两个函数构造的第二个层次的函数$p \wedge q \longrightarrow p \vee q$因前后件都真所以也真。下面三行可由此类推。

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\wedge q\longrightarrow p\vee q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

根据这一特点，如果一命题公式所得若干值中即使只有一个假值，它也不是重言式。例如，$p\vee q$就不是重言式，我们从上表可以看出，虽然$p\vee q$有三个值为真，但是第四个值由于p和q都取假值而其真值为假。

2．永假公式　不论命题变项取什么真值，函项值恒为假的真值函项是永假的真值函项，其相应的命题公式叫作“矛盾式”。比如，$p\wedge\neg p$、$\neg(\neg p\vee p)$都是矛盾式。在真值表上，矛盾式的最后一列真值均为假。从形式上看，如果否定整个重言式，得到的式子就是矛盾式。矛盾式是逻辑矛盾的表现形式。

3．综合公式　有时得真有时得假的真值函项是综合的真值函项，其相应的命题公式叫作综合式。例如$p\wedge q$、$p\longrightarrow q$都是综合式，因为它们在真值表上的真值有真有假。我们还可以说，既非重言式又非矛盾式的公式就是综合式。所谓“综合”，就是有真有假的不同情况。也有人称此类公式为“事实公式”，即其真假不能由逻辑分析而定，而要由客观事实来定。

根据上面情况不难发现，任一命题公式都可归结为这三类中的一类。其中，重言式具有特别重要的意义。重言式是逻辑真理的表现形式。各种逻辑规律以及正确的逻辑推理（指演绎推理）形式等逻辑真理均可表现为重言式。比如，同一律可表现为$p\longrightarrow p$，排中律可表现为$p\vee\neg p$，假言推理的充分条件的肯定前件式可表现为$(p\longrightarrow q)\wedge p\longrightarrow q$等等。因此，命题逻辑理论的主要内容就是研究重言式的判定和证明方法，探讨如何构造

形式推理系统，使得该系统能穷尽无遗地包罗一切重言式。在重言式中，重言蕴涵式和重言等值式尤其重要。因为凡是正确的推理形式均可表现为重言蕴涵式和重言等值式，并且绝大多数重言式是重言蕴涵式和重言等值式。

四　重言式

重言式是命题逻辑中的规律。我们分如下三个问题来讲：

（一）重言蕴涵式　重言蕴涵式是反映正确推理形式结构的命题形式。命题形式是如何反映正确推理形式结构的呢？比如假言推理的肯定式：如果p那么q，现在p；所以q。它表示一个正确的推理形式结构。分号以前是两个前提，分号以后是结论。由于在正确的推理形式中前提真则结论必真，即前提和结论之间存在着蕴涵关系，所以推理形式可以用一个命题形式（即真值形式）来表示，这个命题形式表现为蕴涵式。蕴涵式的前件是各个前提的合取，后件则是结论。前述假言推理肯定式用符号式写出就是：

$$((p\longrightarrow q)\wedge p)\longrightarrow q。$$

这是一个蕴涵式。相当于一个正确推理形式的蕴涵式必定是一个重言式，因为，正确推理形式是不依赖于其前提和结论的具体内容的，所以不论p和q代表什么命题，是真还是假，蕴涵式总是真的即必定是重言式。我们可以用真值表说明上式：

编号	p	q	$p\longrightarrow q$	$(p\longrightarrow q)\wedge p$	$((p\longrightarrow q)\wedge p)\longrightarrow q$
①	1	1	1	1	1
②	1	0	0	0	1
③	0	1	1	0	1
④	0	0	1	0	1

从上面三个层次的真值表中可以看出，只有在（p⟶q）和p都

真（即①）的情况下，$(p \longrightarrow q) \wedge p$才是真的，而在这种情况下，q原设定是真的。故此时$((p \longrightarrow q) \wedge p) \longrightarrow q$是真的。而在②、③、④三种情况下，p和$p \longrightarrow q$不是同时都真，故$(p \longrightarrow q) \wedge p$假。前面讲过，用假前提作前件的蕴涵式都是真的，所以$((p \longrightarrow q) \wedge p) \longrightarrow q$真。总言之，这四种情况下，该式都是真的。所以$((p \longrightarrow q) \wedge p) \longrightarrow q$是个重言式。这个重言式表达了一个正确的推理形式。

相反，一个不正确的推理形式虽然也有一个相当的命题形式，但是这种命题形式并不永真，不是重言式。比如假言推理肯定式的错误形式：如果p那么q，现在q；所以p。其相当的蕴涵式是：$((p \longrightarrow q) \wedge q) \longrightarrow p$。其真值表为：

编号	p	q	$p \longrightarrow q$	$(p \longrightarrow q) \wedge q$	$((p \longrightarrow q) \wedge q) \longrightarrow p$
①	1	1	1	1	1
②	1	0	0	0	1
③	0	1	1	1	0
④	0	0	1	0	1

最后一列表明$((p \longrightarrow q) \wedge q) \longrightarrow p$不是重言式。因为在第③种情况下，两个前提和q都是真的，故$(p \longrightarrow q) \wedge q$真，然而此时p设定是假的，故末列公式在这种情况下是假的。尽管在第一真假情况下可以从前提之真推出结论之真，但是由于从这4种情况的总体上不能完全保障从前提之真推出结论之真，所以这个蕴涵式不是重言式，它不能反映正确的推理形式。用它作推理公式，在某些情况下就要弄出错误来。

如果推理的结论是它的前提的符合逻辑的结果，那么这种推理就称为有效推理。所谓符合逻辑是指：如果它的前提真，那么它的结论也必然真。尽管当前提都真时有效推理推出的结论必然真，但是推理形式并不要求前提或结论必须为真。考虑到前提的

真实需要依靠其他学科去解决，因而传统逻辑和现代逻辑都把自己限于研究推理形式的有效性。

错误的推理形式的无效性，证明比较容易。只需说明在这个推理形式中使前提取值为真而结论为假的真值指派①是存在的，就可以肯定这是一个无效推理形式。但是，推理形式有效性的检验比较麻烦，它需要验证各种可能的真值指派。

这里介绍一个一般的判定方法。我们说：推理形式“A_1，A_2，…，A_n；∴A”②是有效的，当且仅当命题形式（$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$）⟶A是重言式。

证明：首先假设“A_1，A_2，…，A_n；∴A”是有效推理形式。如果再设（$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$）⟶A不是重言式，那么一定存在命题变项的一个真值指派，能使（$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$）取值为真，A取值为假。于是对这个真值指派一定有“A_1，A_2，…，A_n皆真，而A假”的情况出现。这就和上述假设相矛盾。可见（$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$）⟶A不是重言式的假设是错误的，所以这个蕴涵式是重言式。反过来，假设（$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$）⟶A是重言式，而再设$A_1$，$A_2$，…，$A_n$；∴A是一个无效推理形式，那么一定存在一个使得$A_1$，$A_2$，…，$A_n$取值都为真，A取值为假的真值指派。在这种情况下（$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$）⟶A的取值必为假，这又和它是重言式相矛盾。可见，推理形式A_1，A_2，…，A_n；∴A是有效的。

（二）重言等值式　如果对两个命题逻辑公式中所出现的一切变项赋与任何逻辑值时两个公式的值总是相同，那么我们就说这两个公式是等值的，它们共同组成的等值式称作重言等值式。

---

① 真值指派意即真假组合方式。如前面所列真值表的①就表示一种真值指派。这时指派p为真而q也真。同理，②也是一种真值指派。以此类推。

② 符号“∴”在汉语中表示“所以”、“故”、“则”之类的意思。“A_1，A_2，…，A_n；∴A”可读作“如A_1，A_2…直到A_n都成立，则A成立。”

不仅包含相同命题变项的一些公式可以是等值的，而且包含不同变项的公式也可能是等值的，例如，$p\wedge(p\vee q)$等值于p。

重言等值式的两端是等值的。某些命题形式虽然在表达方式上很不相同，但是从它们所表示的真假情况来说是完全相同的。我们举两个例子：

例 1. $\neg(p\vee q)\longleftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$

这是说否定“p或q”，等于“否定 p”并且“否定q”。比如，否定“a＝0或b＝0”，等于“否定a＝0”并且“否定b＝0”。这种逻辑关系就是后面要讲到的德·摩根定理之一。

例 2. $(p\longrightarrow q)\longleftrightarrow(\neg p\vee q)$

这是一个重要的等值式。前面讲过，它表示了真值蕴涵的特征，意思是说“p蕴涵q”等于说“p假或者q真”。

等值关系具有下述逻辑性质：1.它是自反的，即A等值于A；2.它是对称的，即如果A等值于B，那么B等值于A；3.它是传递的，即如果A等值于B，并且B等值于C，则A等值于C。以后将可以看到，我们依据这些性质可以进行逻辑推演。

常用的重言式

（1）$(p\longrightarrow q)\wedge p\longrightarrow q$　　分离律

（2）$(p\longrightarrow q)\wedge\neg q\longrightarrow\neg p$　　否后律

（3）$(p\vee q)\wedge\neg p\longrightarrow q$
（4）$(p\vee q)\wedge\neg q\longrightarrow p$　　}否析律

（5）$p\wedge q\longrightarrow p$
（6）$p\wedge q\longrightarrow q$　　}合简律

（7）$p\vee p\longrightarrow p$　　析简律

（8）$(p\longrightarrow\neg p)\longrightarrow\neg p$
（9）$(\neg p\longrightarrow p)\longrightarrow p$　　}蕴简律

（10）$p\longrightarrow p$　　同一律

（11）$(p\longrightarrow q)\wedge(q\longrightarrow r)\longrightarrow(p\longrightarrow r)$　　三段论律

（12）$(p\longrightarrow q\wedge\neg q)\longrightarrow\neg p$　　归谬律

公式	定律
(13) $p \rightarrow p \vee q$	附加律
(14) $p \leftrightarrow \neg\neg p$	双否律
(15) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	换位律
(16) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ (17) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ (18) $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$ (19) $(p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$	德·摩根律
(20) $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ (21) $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$	交换律
(22) $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (23) $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	结合律
(24) $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (25) $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	分配律
(26) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg p \vee q$ (27) $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$	蕴涵律
(28) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ (29) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ (30) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ (31) $\neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$	等值律
(32) $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$ (33) $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$	吸收律
(34) $p \leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q)$ (35) $p \leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg q)$	加元律
(36) $p \wedge p \leftrightarrow p$ (37) $p \vee p \leftrightarrow p$	幂等律
(38) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$	并前律
(39) $p \vee \neg p$	排中律
(40) $\neg(p \wedge \neg p)$	矛盾律

（三）重言式的鉴别　当人们给出任意一个命题公式，如何鉴别这一公式是否是重言式，即是否是正确的推理形式或有效形

式，这是命题逻辑的重大任务。我们可以寻求一种程序，依据它可以判明任一命题公式是否是重言式。这种程序应是机械的，并且在有穷步骤内能够完成的。这类程序所指示的方法称作“能行方法”。我们主要介绍五种方法，即真值表法，简化真值表法，真值树法，演绎证明法和范式法。

1．真值表法　对于每一个命题公式我们总是能够构造一个相应的真值表来判定它是否是重言式。例如，我们判定公式

$$((p \wedge q) \longrightarrow r) \longrightarrow (p \longrightarrow (q \longrightarrow r))$$

就可以按这样的程序进行：第一，判明命题公式中不同的变项的数目，并依字母表次序排成序列。比如上面公式有三个不同的变项 p，q，r，每个变项都可能取真假二值，而三个变项的逻辑值的各种组合则是2^3种。如果公式中不同变项的数目是 n，那么其不同的逻辑值组合是2^n种。第二，构造相应的真值表。上面公式的真值表是：

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$(p \wedge q \to r) \to (p \to (q \to r))$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

从此表可以看出，最后一列表示上面的公式在所有取值可能中都真，所以它是重言式。

前面讲过，如果一个命题公式在真值表上的最后一列（即最后一个结构层次的函数）值均为真，那么该公式就是重言式；否则就不是重言式。但是真值表的判定程序是十分烦琐的。当一个

公式中的命题变项较多时，真值表的行数就会大量增加。如命题变项为4个时，真值表就有16行等。对一个变项较多、公式较长较复杂的命题形式而言，制作真值表的过程就相当复杂，制成后的真值表也相当庞大。因此有必要把真值表的方法加以简化。

2．简化真值表法　简化真值表主要是运用反证法。先假定要判断的式子是假的，看是否会闹出些什么矛盾来。

例如要说明（（p⟶q）∧¬q）⟶¬p是重言式，我们就先假定此公式假，即假定前件（p⟶q）∧¬q真而后件¬p假。但当我们此时要求前件（p⟶q）∧¬q这一合取式真的时候，就等于要求在¬p假（即p真）的条件下（p⟶q）和¬q都真。于是就出现了逻辑矛盾：如p⟶q真，则因前件p真，后件q不能假，即¬q不能真；如¬q真，即q假，则p⟶q因前件真后件假而假。因此原公式不能假，而是一个重言式。

我们也可以用图表表示。还用上面的公式为例，制图表如下。

步　骤	((p	⟶	q)	∧	¬	q)	⟶	¬	p
①							0		
②				1				0	
③		1			1				1
④	1		1			0			

第①步是假定整个式子假，即在主要蕴含词⟶下写一个0字。既然整个式子假，必然是前件真而后件假，于是第②步就在前件的合取词∧下写1，而在后件的否定词¬下写0。既然前件合取式为1，则p⟶q和¬q都为1，故第③步是在p⟶q的蕴含词⟶下写1，¬q的否定词¬下也写1；同时因整个式子的后件¬p为0，故p为1，就在¬p的p字下写1。既然p⟶q为1，故第④步在p和

q之下都写1，但同时因 $\neg q$ 为1，故在q 下写0。至此，便出现了矛盾，q 一会儿是 1，一会儿又是 0，这说明原来的假定是错误的。因此整个公式是重言式。

3.真值树法 这种方法就是通过建立一个公式的真值树来判定它是不是重言式的一种方法。运用这种方法必须先掌握下列重言等值式：

①$\neg\neg p \longleftrightarrow p$

②$(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow \neg p \vee q$

③$\neg(p \vee q) \longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

④$\neg(p \wedge q) \longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$

⑤$(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

⑥$\neg(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow p \wedge \neg q$

我们用简化真值表法可以判明这六个等值式是重言式。在运用真值树法时，如果遇到形式如等值号左边的公式，那就可以代换成右边形式的公式。真值树法的具体步骤是：（1）先列出被判定的蕴涵式的前件，如果前件是一复合的合取式，那就把合取式的各部分公式分行列出。（2）列出被判定的蕴涵式的后件的否定。（3）把列出的各行公式按照以下规定拆成简单公式或简单公式的否定：如果被拆公式是合取式，那就销去合取号，把合取式的各部分公式写成竖行，这种竖行就是真值树的枝；如果被拆公式是析取式，那就消去析取号，并把各部分公式并列列出，用线段把它们同上一行公式联起来，这样的线段叫“叉”；如果被拆公式是否定式、蕴涵式或等值式，则先用上述六个等值式把它们换成等值的合取式或析取式，然后再按照上述方法拆离。第四，从下往上（不能从上往下）返溯每一叉枝上出现的简单公式及其否定，如果发现同一简单公式及其否定都出现，那就在发现的叉枝下端划上△号。凡有△号的叉枝就是关闭的枝。如果所有叉枝均为关闭的枝，那么该真值树就是完成的树，否则就不是完成的

树。如果一个蕴涵式的真值树是完成的树，那么该蕴涵式是重言式，否则便不是重言式。

例1.判定（$p \longrightarrow q$）$\longrightarrow$（$\neg q \longrightarrow \neg p$）是否重言式。

证　（1）$p \longrightarrow q$　　　　　　　　步骤一

（2）$\neg(\neg q \longrightarrow \neg p)$　　　步骤二

（3）$\neg q \wedge \neg\neg p$　　　　　　步骤三，据（2）得

（4）$\neg P \vee q$　　　　　　　　步骤三，据（1）得

（5）$\neg q$
（6）　　　　P　　　　　　　}步骤三，据（3）得

（7）　　$\neg P$ ∧ q　　　　　　步骤三，据（4）得
　　　　△　△

从行（7）顺着叉枝往上溯，$\neg p$和行（6）的p相矛盾，q和行（5）的$\neg q$相矛盾，所以在行（7）的$\neg p$和q下均划上△号以表示这两个叉枝都是关闭的。该真值树是完成的，因此原公式是重言式。

4.演绎证明法　任一命题公式是否是重言式，还可以放在某一命题推理系统中加以演绎证明，这种系统可以是公理推理系统，也可以是自然推理系统，任一命题公式只要在这些系统中得到证明，就可以被断定为重言式。所谓公理推理系统，就是把少数几个公理（即不加证明的命题公式）作为推理的出发点或前提，按照一定推理规则进行推理证明的系统。所谓自然推理系统，就是其出发点不是公理而是推理时引进假设的演绎推理系统。当然，不管哪种系统，只要前提真实，或者说前提是重言式，同时推理形式正确，那么结论就一定真实，或者说结论也一定是重言式。关于演绎证明法，我们将在下一节的命题逻辑的演算系统中详细介绍。

5.范式法　有的简单公式可以从直观上看出是重言式，比如$p \vee \neg p$这种简单析取式就是明显的重言式。我们对任何命题公

式都可以通过等值置换而消除其中的蕴含词$\rightarrow$和等值词$\leftrightarrow$，从而只剩下只有$\wedge$，$\vee$和$\neg$的命题公式；进而构成由简单析取式作为合取项的合取范式。如果合取范式中的每个合取项、即每个简单析取式都是重言式，那么就说明了原命题公式是重言式。这就是用范式判定重言式的方法。详细内容我们将放在下面的"范式"部分中讲述。

五　范式

范式就是最规范、最标准的公式，在数学中一般称为"通式"。命题逻辑的范式是说：如果命题逻辑公式只包含联结词$\wedge$，$\vee$和$\neg$，并且其中否定符号$\neg$只属于一个变项，那么它就是范式。例如公式$(p\wedge\neg q)\vee((\neg r\vee S)\wedge(\neg p\vee q))$就是范式。而公式$(p\vee q)\wedge\neg(q\vee r)\wedge S$则不是范式，因其中的$\neg$属于析取式$q\vee r$的整体，不合上述规定。

（一）主要概念

1.简单析取　我们把其支命题是命题变项或命题变项的否定的析取式称作简单析取。例如：P，$p\vee\neg q$，$p\vee q\vee r$，$p\vee\neg P$都是简单析取。而$p\vee(p\wedge q)$，$\neg(p\wedge q)\vee(q\wedge r)$就不是简单析取。一个简单析取是重言式，当且仅当它至少含有一对这样的析取支，其中一个是某变项，而另一个是它的否定。例如简单析取

$$p\vee\neg p\vee q$$

就是重言式，因为其中含有一对如$p\vee\neg p$形式的析取支。而$p\vee\neg q\vee\neg r$就不是重言式。

2.简单合取　我们把这样一些合取式称作简单合取，其支命题是一个个的命题变项或命题变项的否定。例如：p，$p\wedge\neg q$，$p\wedge q\wedge r$，$p\wedge\neg p$都是简单合取。而$p\wedge(p\vee q)$，$\neg(p\wedge q)\wedge r$就不是简单合取，因为其支命题中出现了$p\vee q$这样的析取式，而不都是单独的命题变项。简单合取一个简单合取是矛盾式，当且仅

当它至少含有一对这样的合取支，其中一个是某变项，而另一个是它的否定。例如简单合取

$$p \wedge \neg p \wedge q$$

就是矛盾式，因为其中含有一对如 $p \wedge \neg p$ 形式的合取支。而 $p \wedge \neg q \wedge \neg r$ 就不是矛盾式。

3.析取范式　我们把其支命题都是简单合取的析取式称作析取范式。例如：$(\neg p \wedge q) \vee p$，$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ 就是析取范式。析取范式易于显示矛盾。一个析取范式是否为矛盾的，可以用极简易的方法在有穷步骤内判定，这是因为每一个析取范式都由几个简单合取组成。如果组成析取范式的每一个简单合取都是永假的矛盾式，那么该析取范式就是永假的矛盾式。例如析取范式

$$(p \wedge q \wedge \neg p) \vee (r \wedge \neg r)$$

就是永假的矛盾式，因为其中的简单合取 $p \wedge q \wedge \neg p$ 和 $r \wedge \neg r$ 都是永假的矛盾式。

4.合取范式　我们把其支命题都是简单析取的合取式称作合取范式。例如：$(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$，$(p \vee q) \wedge r$ 就是合取范式。合取范式易于显示重言式。一个合取范式是否为重言的，可以用极简易的方法在有穷步骤内判定。这是因为每一个合取范式都由几个简单析取组成。如果组成合取范式的每一个简单析取都是永真的重言式，那么该合取范式就是永真的重言式。例如合取范式

$$(p \vee q \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg r)$$

就是永真的重言式，因为其中的简单析取 $p \vee q \vee \neg q$ 和 $r \vee \neg r$ 都是永真的重言式。

不同的析取范式或合取范式可以表达同一的真值函项。比如下面两个合取范式

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee p)$$

$$(\neg q \vee p) \wedge (\neg r \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$$

其范式形式不同，但其真值函项却相同。在命题演算中，我们经常需要将这些不同形式的范式转换为具有唯一性的范式，即优范式。

5.优析取范式　满足下述条件的析取范式就是优析取范式：

（1）如果某一命题变项在范式中出现，那么它要在每一个简单合取里都出现；

（2）范式中不存在永假的简单合取；

（3）在简单合取中没有相同的命题变项；

（4）没有相同的简单合取；

（5）范式中的命题变项及其否定按字母表顺序排列，其顺序一般为：〔p, $\neg p$, q, $\neg q$, r, $\neg r$, S, $\neg S$, p_1, $\neg p_1$, …〕。

6.优合取范式　满足下述条件的合取范式就是优合取范式：

（1）如果某一命题变项在范式中出现，那么它要在每一个简单析取里都出现；

（2）范式中不存在永真的简单析取；

（3）在简单析取中没有相同的命题变项；

（4）没有相同的简单析取；

（5）范式中的命题变项及其否定按字母表顺序排列，其顺序如前。

（二）存在定理　是否任何命题公式都有范式呢？是否任何命题公式都有唯一的优范式呢？回答是肯定的。因此有两个存在定理：

1.范式存在定理：任何命题公式都存在着与其等值的析取范式和合取范式。

对于这个定理，只要我们证明在命题逻辑中存在着一类能行的方法，借助这类方法能够把任一命题逻辑公式变换为等值于它的析取范式和合取范式，就完成了该定理的证明。下面是具体证明：

（1）命题逻辑中有这样的重言等值式和置换定理，借助于它们可以把任一命题逻辑公式变换为范式。这些等值式是：

①双重否定律$\neg\neg p \longleftrightarrow p$，借助它可消去双重否定；

②蕴涵析取律$(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg p \vee q)$，能把$\longrightarrow$变换为$\vee$和$\neg$；

③等值律$(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$，能把$\longleftrightarrow$变换为$\neg$，$\wedge$和$\vee$。

经过这样的变换，所获得的公式只包含逻辑常项$\neg$、$\wedge$和$\vee$，因此它是范式。

（2）命题逻辑中存在着这样一类重言等值式，借助于它们和置换定理，经过有穷步骤可以把任一范式变换为析取范式和合取范式。这些等值式是：

①德·摩根定律$\neg(p \wedge q) \longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$，$\neg(p \vee q) \longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$，借助它能把否定符号$\neg$分别移至单个的命题变项前；

②分配律$p \wedge (q \vee r) \longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$，$p \vee (q \wedge r) \longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$，通过它们可把范式变换为析取范式或合取范式。

所以任何命题公式都能化为析取范式和合取范式。范式存在定理得证。

2.优范式唯一存在定理：任何命题公式都有一个唯一的优合取范式和一个唯一的优析取范式。

在定理证明中，关于优范式存在的问题比较明显，因为每一公式都是一个有穷长的符号序列。从这一公式的范式出发经过有穷次的展开，销去和排列，最后必然可以得到原公式的优合取范式和优析取范式。但是，关于优范式唯一性问题的证明却比较复杂。我们这里就省略了。

（三）范式求法

求析取范式和合取范式的步骤是：

1. 销去$\longrightarrow$和$\longleftrightarrow$：

（1）$p\longrightarrow q$换以$\neg p\vee q$；

（2）$p\longleftrightarrow q$换以$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$或$(\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$。

2. 否定号的内移和销去：

（1）$\neg\neg p$换以p；

（2）$\neg(p\vee q)$换以$\neg p\wedge\neg q$；

（3）$\neg(p\wedge q)$换以$\neg p\vee\neg q$。

3. 合取和析取的置换：

（1）合取和析取的各支可相互交换；

（2）依需要可改变合取和析取支的次序；

（3）据分配律

$p\vee(q\wedge r)$换以$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$；

$p\wedge(q\vee r)$换以$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$。

例1. 求$((p\longrightarrow q)\wedge p)\longrightarrow q$的合取范式。

解：①$\neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q$　（销去$\longrightarrow$）

②$(\neg(\neg p\vee q)\vee\neg p)\vee q$　（否定号内移）

③$((\neg\neg p\wedge\neg q)\vee\neg p)\vee q$　（否定号内移）

④$((p\wedge\neg q)\vee\neg p)\vee q$（销去双否）

⑤$((p\vee\neg p)\wedge(\neg p\vee\neg q))\vee q$　（分配）

⑥$(p\vee\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee q)$　（分配）

最后一行的公式就是合取范式。

例2. 求$\neg(p\longleftrightarrow\neg p)$的析取范式。

解：①$\neg((p\wedge\neg p)\vee(\neg p\wedge\neg\neg p))$（销去$\longleftrightarrow$）

②$\neg((p\wedge\neg p)\vee(\neg p\wedge p))$　（销去双否）

③$\neg(P\wedge\neg p)\wedge\neg(\neg p\wedge p)$（否定号内移）

④$(\neg p\vee\neg\neg p)\wedge(\neg\neg p\vee\neg p)$（否定号内移）

⑤$(\neg p\vee p)\wedge(p\vee\neg p)$　（销去双否）

⑥ $((\neg p\vee p)\wedge p)\vee((\neg p\vee p)\wedge\neg p)$ （分配）

⑦ $(\neg p\wedge p)\vee(p\wedge p)\vee(\neg p\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg p)$

（分配）

最后一行的公式就是析取范式。

下面谈优范式的求法，其步骤是：

1.展开规则：

（1）据 $p\longleftrightarrow p\wedge(q\vee\neg q)$，p换以 $p\wedge(q\vee\neg q)$；

（2）据 $p\longleftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)$，p换以 $p\vee(q\wedge\neg q)$。

2.销去规则：

（1）据 $p\vee p\longleftrightarrow p$，$p\vee p$换以p，

据 $p\wedge p\longleftrightarrow p$，$p\wedge p$换以p；

（2）据 $p\vee(q\wedge\neg q)\longleftrightarrow p$，前者换以p，

据 $p\vee(q\wedge\neg q\wedge r)\longleftrightarrow p$，前者换以p；

（3）据 $p\wedge(q\vee\neg q)\longleftrightarrow p$，前者换以p，

据 $p\wedge(q\vee\neg q\vee r)\longleftrightarrow p$，前者换以p。

3.排列规则：

根据交换律和结合律把变项与它的否定按字母表顺序排列。

例1.求 $p\longrightarrow(p\longrightarrow q)\wedge\neg(p\longrightarrow\neg q)$ 的优析取范式。

解：① $\neg p\vee(\neg p\vee q)\wedge\neg(\neg p\vee\neg q)$（蕴析）

② $\neg p\vee(\neg p\vee q)\wedge(\neg\neg p\wedge\neg\neg q)$（D·m）

③ $\neg p\vee(\neg p\vee q)\wedge(p\wedge q)$（双否）

④ $\neg p\vee(\neg p\wedge(p\wedge q))\vee(q\wedge(p\wedge q))$（分配）

⑤ $\neg p\vee(\neg p\wedge p\wedge q)\vee(q\wedge P\wedge q)$（结合）

⑥ $\neg p\vee(\neg p\wedge p\wedge q)\vee(p\wedge q\wedge q)$（交换）

⑦ $\neg p\vee(p\wedge q)$（销去）

⑧ $\neg p\wedge(q\vee\neg q)\vee(p\wedge q)$（展开）

⑨ $(\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$（分配）

最后一行的公式就是优析取范式。

例2.求（$\neg p\rightarrow r$）∧（$q\leftrightarrow p$）的优合取范式。

解：①（$\neg\neg p\vee r$）∧（（$\neg q\vee p$）∧（$\neg p\vee q$））

（销去→和↔）

②（$p\vee r$）∧（（$\neg q\vee p$）∧（$\neg p\vee q$））（双否）

③（$p\vee r$）∧（$\neg q\vee p$）∧（$\neg p\vee q$）（结合）

④（（$p\vee r$）∨（$q\wedge\neg q$））∧（（$\neg q\vee p$）∨（$r\wedge\neg r$））∧（（$\neg P\vee q$）∨（$r\wedge\neg r$））（展开）

⑤（（$p\vee r\vee q$）∧（$p\vee r\vee\neg q$））∧（（$\neg q\vee p\vee r$）∧（$\neg q\vee p\vee\neg r$））∧（（$\neg p\vee q\vee r$）∧（$\neg p\vee q\vee\neg r$））（分配）

⑥（$p\vee q\vee r$）∧（$p\vee\neg q\vee r$）∧（$p\vee\neg q\vee r$）∧（$p\vee\neg q\vee\neg r$）∧（$\neg p\vee q\vee r$）∧（$\neg p\vee q\vee\neg r$）（结合）

最后一行的公式就是优合取范式。

（四）范式作用　范式的各种逻辑性质决定它有很多重要作用。

1.析取范式的作用

（1）可以判别任一命题公式是不是矛盾式。例如判别（$p\rightarrow q$）∧（$q\rightarrow r$）∧$\neg$（$p\rightarrow r$）是否矛盾，就可以通过它的析取范式（$\neg p\wedge\neg q\wedge p\wedge\neg r$）∨（$\neg p\wedge r\wedge p\wedge\neg r$）∨（$q\wedge\neg q\wedge p\wedge\neg r$）∨（$q\wedge r\wedge p\wedge\neg r$）的每一个简单合取都是矛盾式，而判定它整个公式也是矛盾式。

（2）可以部分地表现出任一命题公式的真假条件。例如$p\rightarrow q\wedge r$的析取范式是$\neg p\vee$（$q\wedge r$）。可以看出，原公式在p假或者q和r都真的情况下是真的。当然这方面的作用是有限的，比如上面的析取范式就没有举出p假q真r假等情况。

2.合取范式的作用，可以判别任一命题公式是否为重言式。如果某命题公式的合取范式是重言式，即这个合取范式的每个简单析取都是重言式，那么原命题公式就是重言式。

例1. 用范式方法求证（$P\rightarrow q$）$\rightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$是否重言式。

证明： ①$\neg(\neg p\vee q)\vee(\neg\neg q\vee\neg p)$（销去$\longrightarrow$）

②$(\neg\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg\neg q\vee\neg p)$（D·M）

③$(p\wedge\neg q)\vee(q\vee\neg p)$（双否）

④$(p\vee q\vee\neg p)\wedge(\neg q\vee q\vee\neg p)$（分配）

其中简单析取都是重言式，所以原公式是重言式。

例2. 用范式方法求证（$p\longrightarrow q$）$\longrightarrow$（$q\longrightarrow p$）是否重言式。

证明： ①$\neg(\neg p\vee q)\vee(\neg q\vee p)$（销去$\longrightarrow$）

②$(\neg\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg q\vee p)$（D·M）

③$(p\wedge\neg q)\vee(\neg q\vee p)$（双否）

④$(p\vee\neg q\vee p)\wedge(\neg q\vee\neg q\vee p)$（分配）

其中有的简单析取不是重言式，所以原公式不是重言式。

3.优析取范式的作用

（1）可以判别任一命题公式是不是矛盾式。这跟前述的析取范式的作用一样，只不过当销去矛盾的简单合取之后，优析取范式就表现为零公式。

（2）可以完全地表现出任一命题公式的真假条件。这比前述的析取范式的作用要前进一步。其表现方法是：每一析取支都表明了使原公式为真的一种真假组合可能，而所有析取支就表明了全部使原公式为真的真假组合可能。

例1. 判明$p\rightarrow q\wedge r$的真假情况。

解： ①$\neg p\vee(q\wedge r)$　（销去$\rightarrow$）

②$(\neg p\wedge(q\vee\neg q)\wedge(r\vee\neg r))\vee$
$((q\wedge r)\wedge(p\vee\neg p))$（展开）

③$(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$
$\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(q\wedge r\wedge p)\vee(q\wedge r\wedge\neg p)$
（分配）

④ $(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$

$\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$（销去和排列）

最后一行的公式就是优析取范式，从中可以看出原公式在五种真假组合里是真的。

（3）可以表明任意两个命题公式之间是否等值。这一点因为跟优合取范式一样，所以放在下面来讲。

（4）可以对命题公式进行化简，也因为跟优合取范式一样，放在下面来讲。

4.优合取范式的作用

（1）可以判别任一命题公式是否为重言式。重言式的优合取范式为零公式。例如$(p\longrightarrow q)\longrightarrow(\neg q\longrightarrow\neg p)$的合取范式为$(p\vee q\vee\neg p)\wedge(\neg q\vee q\vee\neg p)$，销去重言的简单析取所得的优合取范式即为一零公式。因此用优合取范式可以判别重言式。

（2）可以表明任意两个命题公式之间是否等值。这一点跟优析取范式的作用相同。因此，命题公式的互相等值可用优范式定义为：公式A和公式B是等值的，当且仅当A的优合（析）取范式和B的优合（析）取范式是同一的。

例1.用优合取范式判别公式A：$p\wedge(p\longrightarrow q)$和公式B：$\neg(p\longrightarrow\neg q)$是否等值。

解：公式A的优合取范式：

①$p\wedge(\neg p\vee q)$　（蕴析）

②$(p\vee(q\wedge\neg q))\wedge(\neg p\vee q)$　（展开）

③$(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q)$（分配，结合）

公式B的优合取范式：

①$\neg(\neg p\vee\neg q)$　（蕴析）

②$P\wedge q$（D•M，双否）

③$(p\vee(q\wedge\neg q))\wedge(q\vee(p\wedge\neg p))$　（展开）

④$(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(q\vee p)\wedge(q\vee\neg p)$（分

配，结合）

⑤ $(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(p\vee q)\wedge(\neg p\vee q)$（交换）

⑥ $(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q)$　　（消去）

十分明显，A和B的优合取范式是同一的，所以A和B等值。

（3）可以表明任一命题公式所可能有的全部逻辑推断。例如A和B的优合取范式表明，从A和B可以推断出：

① $p\vee q$；

② $p\vee\neg q$；

③ $\neg p\vee q$；

④ $(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$；

⑤ $(p\vee q)\wedge(\neg p\vee q)$；

⑥ $(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q)$；

⑦ $(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q)$；

⑧据分配和加元由④可推出p；

⑨据分配和加元由⑥可推出q。

（4）可以对命题公式进行化简，这一点跟优析取范式的作用相同。求得优范式后再根据分配律 $(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$ 等值于 $p\vee(q\wedge\neg q)$，进而等值于p，因此就可以用p代替前二者，从而使前二者化简。

例1．化简 $p\wedge(p\vee q)$。

解：① $(p\vee(q\wedge\neg q))\wedge(p\vee q)$　（展开）

② $(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(p\vee q)$（分配）

③ $(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$（销去）（即优合取范式）

④ p　（化简）

例2．化简 $p\wedge(\neg p\vee q)$。

解：① $(p\vee(q\wedge\neg q))\wedge(\neg p\vee q)$　（展开）

②$(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q)$ （分配）

③$(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(p\vee q)$

$\wedge(\neg p\vee q)$ （逆销去）

④$(p\vee(q\wedge\neg q))\wedge(q\vee(p\wedge\neg p))$（逆分配）

⑤$p\wedge q$ （销去）（化简）

例3.化简$(p\longrightarrow\neg q)\longrightarrow(p\longleftrightarrow\neg q)$。

解：①$\neg(\neg p\vee\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg\neg q)$

（销去$\longrightarrow$，$\longleftrightarrow$）

②$(\neg\neg p\wedge\neg\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg\neg q)$

（D·M）

③$(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$（双否）（即优析取范式）

④$p\vee q$（化简。根据③表明的原公式的三种可能为真的情况，它与$p\vee q$是重言等值式）

六 推理

这里介绍一些传统的复合命题推理问题。在传统逻辑中，复合命题推理包括联言推理、选言推理、假言推理、二难推理等。这些推理还可以在后面的命题演算系统中出现并得到证明，但是在那里却不能得到详细讲解。因此在这里作些介绍。

应用数理逻辑方法去分析处理传统逻辑的推理问题是易如反掌的。这实际上是对无具体内容的形式符号作特定的解释罢了。但要注意以下情况：

（一）不是自然语言中的所有“不”“无”都能引用否定词$\neg$（例如“不定式”、“无机化合物”，都不是“定式”“有机化合物”的否定。如“爱情不是有机化合物”不能说成“爱情是无机化合物”。）

（二）自然语言中的“或”如表示不相容关系，则不能单用析取

词表示。（例如p与q不相容，则“p或q”要用（$p\vee q$）$\wedge\neg$（$p\wedge q$）表示，方才全面。）

（三）自然语言中的“如果，那么”要是表示推理，使用蕴涵词$\longrightarrow$和等值词$\longleftrightarrow$时，其两端必须有意义上事实上的联系。用$\neg p\vee q$置换$p\rightarrow q$进行核算，有时要产生“蕴涵怪论”，所以必须验证。

现将常用的推理方式解析如下：

（一）联言推理　联言推理是指：或者结论是一个联言命题，而各个前提是该联言命题的各个联言支；或者前提是一个联言命题，而结论是这个联言命题的一个联言支。联言推理包括：

1.合成式联言推理　就联言命题与它的联言支的真假关系来说，如果所有的联言支都是真的，那么联言命题就是真的。联言推理合成式的前提分别断定了各个联言支是真的，因而联言推理合成式的结论就能够断定由这些联言支所构成的联言命题是真的。例如：林肯是美国的一位总统，林肯是被刺杀的；所以，林肯是美国的一位总统并且他是被刺杀的。合成式联言推理的一般推理形式是：$p\wedge q\longrightarrow p\wedge q$。

2.分解式联言推理　如果一个联言命题是真的，它的联言支就都是真的。联言推理的分解式的前提断定了一个联言命题是真的，因而联言推理分解式的结论就能够断定这个联言命题的联言支是真的。例如：零既不是质数也不是合数，所以，零不是一个质数。分解式联言推理的一般推理形式是：$p\wedge q\longrightarrow p$，或$p\wedge q\longrightarrow q$。

（二）选言推理　是这样一种具有两个前提的推理，其中一个前提是选言命题，另一个前提是这个选言命题的一部分选言支（或其否定）。又分：

1.相容选言推理　以相容选言命题作前提之一的选言推理就是相容选言推理。这种推理只有一种正确的形式，即否定肯定式：前提否定一个选言支，结论肯定另一选言支。例如：这份统计

表格的错误或是由于资料不可靠，或是由于计算不准确，但实际不是由于计算不准确；所以，这份统计表格的错误是由于材料不可靠。相容选言推理的一般推理形式是：$(p\vee q)\wedge\neg p\longrightarrow q$。

2.不相容选言推理　以不相容选言命题作前提之一的选言推理就是不相容选言推理。它有两种形式：

（1）肯定否定式　前提肯定一个选言支，而结论否定其他选言支。例如：战争或者是正义的，或者是非正义的；反法西斯战争是正义的；所以，反法西斯战争不是非正义的。肯定否定式不相容选言推理的一般推理形式是$((p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q))\wedge p\longrightarrow\neg q$。因为此时对不相容关系主要是用其不共真的方面，所以也可简化为$\neg(p\wedge q)\wedge p\longrightarrow\neg q$。

（2）否定肯定式　前提否定除了一个选言支以外其他各选言支，而结论肯定另一选言支。例如：人的正确思想或是从天上掉下来的，或是自己头脑里固有的，或是从实践中来的；人的正确思想不是从天上掉下来的，也不是自己头脑里固有的；所以，人的正确思想只能从社会实践中来。否定肯定式不相容选言推理的一般推理形式是：$((p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q))\wedge\neg p\longrightarrow q$。此时对不相容关系的前提主要是用其不共假的方面，所以也可简化为$(p\vee q)\wedge\neg p\longrightarrow q$。

（三）假言推理　前提中包含假言命题的推理是假言推理。它有两种情况：

1.混合假言推理　这是常见的推理情况：一个前提是假言命题而另一前提是直言命题、其结论也是直言命题的推理。

（1）充分条件假言推理　在这种推理中，假言前提是一个充分条件假言命题的假言推理。又分：

①肯定前件式　小前提肯定大前提的前件，结论肯定大前提的后件。例如：如果骄傲自满，学习就会退步；李华骄傲自满；所以，李华退步。肯定式的一般推理形式是：$(p\longrightarrow q)\wedge p\longrightarrow$

q。

②否定后件式　小前提否定大前提的后件，结论否定大前提的前件。例如：如果短路，就会断电；现没有断电；所以，并没短路。否定式的一般推理形式是：$(p \longrightarrow q) \wedge \neg q \longrightarrow \neg p$。

（2）必要条件假言推理　就是它的假言前提是一个必要条件假言命题的假言推理。我们讲过，必要条件假言命题的形式是"只有p才q"。现代逻辑在讲假言推理时，是把必要条件假言命题转化为充分条件假言命题来处理，即把"只有p才q"转化为"如果q那么p"。又分：

①否定前件式　小前提否定大前提的前件，结论否定大前提的后件。例如：只有不畏艰难险阻才能攻克科学堡垒，王同志惧怕艰难险阻；所以，王同志不能攻克科学堡垒。否定式的一般推理形式是：只有p才q（或非p则非q），非p；所以，非q。但我们将其符号化为$(\neg p \longrightarrow \neg q) \wedge \neg p \longrightarrow \neg q$。

②肯定后件式　小前提肯定大前提的后件，结论肯定大前提的前件。例如：只有不畏艰难险阻才能攻克科学堡垒，李四光同志攻克了科学堡垒；所以，李四光同志不畏艰难险阻。肯定式的一般推理形式是：只有p才q（或非p则非q），q；所以p。但我们将其符号化为：$(\neg p \longrightarrow \neg q) \wedge q \longrightarrow p$。

（3）充分必要条件假言推理　在这种推理里，前件是后件的充分而又必要的条件，而后件也是前件的充分而又必要的条件。即如果$p \longrightarrow q$，那么$q \longrightarrow p$；如果$q \longrightarrow p$，那么$p \longrightarrow q$；总之$p \longleftrightarrow q$。充分必要条件假言推理是充分条件假言推理和必要条件假言推理的结合，因此，它有4种一般推理形式：

①肯定前件就要肯定后件：$(p \longleftrightarrow q) \wedge p \longrightarrow q$。

②否定后件就要否定前件：$(p \longleftrightarrow q) \wedge \neg q \longrightarrow \neg p$。

③肯定后件就要肯定前件：$(p \longleftrightarrow q) \wedge q \longrightarrow p$。

④否定前件就要否定后件：$(p \longleftrightarrow q) \wedge \neg p \longrightarrow \neg q$。

2.纯粹假言推理　大前提、小前提和结论都是假言命题的推理叫作纯粹假言推理。例如：如果通电就会发热，如果发热就会膨胀；所以，如果通电就会膨胀。这也称作假言联锁推理，其一般推理形式是 $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \longrightarrow r)$。

（四）二难推理　是一种特别的有两个假言前提和一个选言前提的推理。当我们考虑事物有两种可能性以及每一种可能性会导致某一后果时，我们常常采取二难推理的形式。二难推理在辩论中常常用到。辩论的一方常常提出一个断定两种可能性的选言前提，再分别由这两种可能性引伸出对方都难于接受的结论。二难推理之所以叫作“二难”，就是由于这个缘故。有时事物不只有两种可能性，而是有三种或四种可能性，也可以分别地进行三难推理或四难推理。对于这些推理情况我们只作一般介绍，不再举例。二难推理又分：

1.构成式　其选言前提的各个选言支，分别地承认了每个充分条件假言前提的前件，结论就分别地承认了各个充分条件假言前提的后件。其一般推理形式是：

（1）如果p那么r，如果q那么r；p或q；所以，r。符号式为 $(p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r) \wedge (p \vee q) \longrightarrow r$。

（2）如果p那么r，如果q那么s；p或q；所以，r或s。符号式为 $(p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow s) \wedge (p \vee q) \longrightarrow (r \vee s)$。

2.破坏式　其选言前提的各个选言支分别地否认各个充分条件假言前提的后件，结论就分别地否认各个充分条件假言前提的前件。其推理形式是：

（1）如果p那么q，如果p那么r；非q或非r；所以，非p。符号式为 $(p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \longrightarrow \neg p$。

（2）如果p那么r，如果q那么s；非r或非s；所以，非p或非q。符号式为 $(p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow s) \wedge (\neg r \vee \neg s) \longrightarrow (\neg p \vee \neg q)$。

（五）几种常见的其他推理

1.假言易位推理　前提是一个充分条件假言命题，而结论是一个否定其后件又否定其前件的假言命题。例如：如果人们不用一定的方式结合起来共同活动和互相交换其活动，人们便不能从事生产；所以，为了从事生产，人们便发生了一定的联系和关系。其一般推理形式是：如果p那么q，所以，如果非q那么非p。符号式为 $(p \longrightarrow q) \longrightarrow (\neg q \longrightarrow \neg p)$。

2.归谬法　归谬法这个推理形式在证明和反驳中经常应用。为了证明A成立，先假设非A成立，然后从非A逻辑地推出假命题或者矛盾命题，于是否定非A而证明A成立。为了反驳A成立，先假设A成立，然后也从A逻辑地推出假命题或者矛盾命题，于是否定了A。这都是应用充分条件假言推理的否定后件式。归谬法可分：

（1）反驳式　又分：

①从被反驳的命题中引伸出假命题。其一般推理形式为：如果p那么非q，现在q，所以非p。符号式为 $(p \longrightarrow \neg q) \wedge q \longrightarrow \neg p$。

②从被反驳的命题中引伸出两个相矛盾的命题。其一般推理形式为：如果p那么q且非q，所以非p。符号式为 $(p \longrightarrow (q \wedge \neg q)) \longrightarrow \neg p$。

③从被反驳的命题中引伸出与其相矛盾的命题。其一般推理形式为：如果p那么非p，所以非p。符号式为 $(p \longrightarrow \neg p) \longrightarrow \neg p$。

（2）证明式　又分：

①从被证明的命题的否定中引伸出假命题。其一般推理形式为：如果非p那么非q，现在q，所以p。符号式为 $(\neg p \longrightarrow \neg q) \wedge q \longrightarrow p$。

②从被证明的命题的否定中引伸出两个相矛盾的命题。其一

般推理形式为：如果非p那么q且非q，所以p。符号式为$(\neg p\longrightarrow(q\wedge\neg q))\longrightarrow p$。

3.反三段论　反三段论的前提是“如果p并且q，那么r”形式，也可以看作一个三段论；反三段论的结论“如果p并且非r，那么非q”形式可以看成是把上述三段论的一个前提加以否定，结论也加以否定，并且调换它们的位置而成。例如：如果客观条件已经成熟而主观方面也作了充分的努力，那么工作一定能成功；所以，如果客观条件已成熟而工作却没有能成功，那么一定是主观方面还没有作充分的努力。反三段论在思维中是经常出现的。如果几个条件联合起来构成某一情况的充分条件，那么，当该情况不出现时，就可推出几个条件中至少有一个条件尚未具备。反三段论的一般推理形式是：如果p并且q，那么r；所以，如果p并且非r，那么非q。符号式为$(p\wedge q\longrightarrow r)\longrightarrow(p\wedge\neg r\longrightarrow\neg q)$。

4.假言联言推理　这种推理的前提是两个假言命题，而结论是由联言命题作为前件和后件的假言命题。又分：

（1）肯定前件式　我们先举实例：如果我们在战略上不藐视敌人，我们就要犯右倾的错误；如果我们在战术上不重视敌人，我们就要犯“左”倾的错误；所以，如果我们既在战略上不藐视敌人，又在战术上不重视敌人，那么，我们就要既犯右倾的错误又犯“左”倾的错误。其一般推理形式是：如果p那么q，如果r那么s；所以，如果p并且r，那么q并且s。符号式为$(p\longrightarrow q)\wedge(r\longrightarrow s)\longrightarrow(p\wedge r\longrightarrow q\wedge s)$。

（2）否定后件式　我们先举实例：如果我们在战略上不藐视敌人，我们就要犯右倾的错误；如果我们在战术上不重视敌人，我们就要犯“左”倾的错误；所以，如果我们要既不犯右的错误，又不犯“左”的错误，那么，我们就要既在战略上藐视敌人，又在战术上重视敌人。其一般推理形式是：如果p那么q，

如果r那么s；所以，如果非q并且非s，那么非p并且非r。符号式为$(p\longrightarrow q)\wedge(r\longrightarrow s)\longrightarrow(\neg q\wedge\neg s\longrightarrow\neg p\wedge\neg r)$。

第二节　命题逻辑的演算系统

我们将要讲的是逻辑演算，它主要指的是命题演算和谓词演算。命题演算是研究由命题经过使用联结词和推理规则等构成更复杂的命题，以及这样构成的命题之间的推理关系。在命题演算中不分析简单命题的内部结构，不考虑它是怎样构成的。在谓词演算（本书只讨论一阶谓词演算）中，要分析简单命题的内部结构，研究由命题和命题函项经过使用联结词和量词所构成的更复杂的命题，以及这样构成的命题之间的推理关系。从推理形式上讲，逻辑演算又分为公理推理系统和自然推理系统。公理推理系统是从少数几个公理（即不说自明的命题或公式）出发，按照推理规则进行的演绎推理；自然推理则是不从公理出发，而是以假设为前提，按照推理规则进行的演绎推理。人们还把公理推理系统称作古典推理系统，把自然推理系统称作现代推理系统，这主要是前者发展的历史比较久远，而后者是本世纪30年代后才兴起的。

一　形式系统

逻辑演算系统是一种形式系统。形式系统都是通过形式化方法构成的。形式化方法在逻辑科学中是揭示思维形式结构的方法。我们知道，任何具体的思想都是形式和内容的统一。如果把具有各种不同内容的命题和推理加以比较，就可以揭示出概念在命题组成中的联系方式，即揭示出它们的形式结构。在揭示思维形式结构或思维形式化的过程中，要引入表达形式结构的人工符

号语言，借助于一定的符号，比如可以把充分条件假言命题的形式结构表达为“如果p，那么q”，进一步表达为“p→q”，等等。思维的形式化，有利于精确地揭示各种逻辑规律，制定相应的逻辑规则，以便帮助人们进行正确的思维训练。

所谓形式系统，就是完全用人工符号语言表达的演绎推理系统，那些符号没有任何具体的语义内容。换句话说，在形式推理系统中，我们不考虑表示推理的符号可作何种语义的解释，只考虑符号与符号之间的逻辑关系；推理本身没有任何内涵的联系，只表现为一系列符号与符号之间的变形，犹如数学演算的符号变形。因此，逻辑推理的形式系统又称作“逻辑变形”或“逻辑演算”。但是，这并不意味着我们主张形式与内容的绝对对立，也不是搞什么唯心主义的符号游戏。事实上，这些符号本身是自然语言的逻辑抽象，而符号与符号之间的逻辑关系（表现为推理规则）则是思维规律的反映。逻辑学之所以要暂时脱离内容而纯形式地研究符号，是为了排除各种不必要的干扰，从而能更精确、更严密地研究思维规律和推理结构。

关于形式系统的构成。形式系统的第一部分是它的形式语言。语言是传达信息的表意符号系统。构成形式语言的最简单的元素是符号，符号包括字母、数字和括号。符号的有穷序列称作表达式，而满足某种要求的表达式称作合式公式。确定一个公式是否是合式的规则称作形成规则（或合式公式定义）。形式系统的第二部分是它的演绎系统。任何一个演绎系统都可以定义为二元组⟨A，R⟩，A是公理的集合，R是推理规则的集合。如果A不是空的，那么公理和导出的定理可作为证明的前提，这样的系统称作公理系统，而如果它是形式化的，那么它就称作形式公理推理系统。如果A是空的，那么推理的主要根据只有推理规则，于是形成自然推理系统。形式系统是公理学系统的语法部分。所谓逻辑语法是指关于符号与符号之间关系的理论。而关于符号与它

所表达的对象之间的关系理论称作逻辑语义学。

关于形式系统的推理规则。这种推理规则有两个主要特点：

（一）应当确保只从前提（或前提集合）推出被此前提（或前提集合）所蕴涵的结论。就是说，依据正确的推理规则推出的结论必须被前提所蕴涵。前提和结论之间必须有蕴涵关系。这种被前提所蕴涵的结论叫作前提的逻辑后承。逻辑后承是指：B是A的逻辑后承，当且仅当A重言蕴涵B。就是说，如果并非A真且B假，那么B就是A的逻辑后承。在这里决不允许真前提推出假结论。这种要求通常叫作“一致性”或“无矛盾性”。正确的演绎推理必须是一致的，而只有一致的推理规则才是正确的。依据一致的推理规则所作的推理是有效的，否则就是无效的。因此有效推理是指：一推理是有效的，当且仅当并非前提真而结论假。推理规则的一致性可以通过检验依据该规则的推理的有效性而得到验证。

（二）推理规则应当确保能把前提蕴涵的所有结论都推出来。这一要求叫作“完全性”。必须看到，符合“一致性”不一定符合“完全性”，符合“完全性”不一定符合“一致性”。比如，所有重言蕴涵式都是一致的，因为依据重言蕴涵式所作的推理总是一致的。就此而言，重言蕴涵式都可以概括为推理规则。但是并非所有的重言蕴涵式都是完全的，如重言蕴涵式$p \longrightarrow p$就不是完全的，因为把它作为推理规则（表述为“从p可推出p”）就不能推出前提蕴涵的所有结论，比如从前提p推不出$p \vee q$，而$p \vee q$却是p的逻辑后承。因此该推理规则是一致的，但却不是完全的。又如，把$p \longrightarrow q$作为推理规则（表述为“从p可推出q”）它满足完全性，因为它允许从任一给定的前提推出任何结论，当然包括前提的所有逻辑后承。但是它又不能完全符合一致性，因为它还允许推出那些非逻辑后承的结论，如$p \longrightarrow q \wedge \neg q$。所以这一规则是完全的，但不是一致的。

现代逻辑是用形式语言表述的，尽管表现力目前还受到一定限制，但是它无歧义，能够十分精确地表现推理。它将运用符号表示概念和命题，能够把推理转变为符号的变换，这样就能把对传统逻辑中对概念、命题和推理转换为对纯形式的符号及其变换的研究，把逻辑转换为演算。用形式语言表述的推理规则，由于精确而能避免悖论。它特别能适应电子计算机的发展需要。当然用形式语言来表述逻辑系统时，反映逻辑规律的形式推理规则的选定不能是任意的。这种规则必须保障一致性和完全性。

二　公理推理系统

公理推理系统有多种形式，我们只介绍其中一种。

（一）语法部分　也称语形或句法部分，它是讲语言符号的规定及其之间关系的部分。

1.初始符号：

（1）p，q，r，s，p_1，q_1，r_1，s_1，p_2，…。

（2）$\neg$，$\vee$。

（3）（，）。

2.形成规则：

（1）初始符号（1）中的任意符号N是一合式公式。

（2）如符号序列A是合式公式，则$\neg A$是合式公式。

（3）如符号序列A和B是合式公式，则（$A \vee B$）是合式公式。

（4）只有符合以上三条的符号序列是合式公式。

3.定义（我们用D表示定义）：

（1）D_1：（$A \longrightarrow B$）$=_{D_f}$（$\neg A \vee B$）。（蕴涵定义）

（2）D_2：（$A \wedge B$）$=_{D_f} \neg$（$\neg A \vee \neg B$）。（合取定义）

（3）D_3：（$A \longleftrightarrow B$）$=_{D_f}$（$\neg A \vee B$）$\wedge$（$\neg B \vee A$）。（等值定义）

4.公理（我们用A表示公理）：

（1）A_1：（p∨p）⟶p。（重言律，或去析公理）

（2）A_2：p⟶（p∨q）。（析取引入律，或加析公理）

（3）A_3：（p∨q）⟶（q∨p）。（析取交换律，或交析公理）

（4）A_4：（q⟶r）⟶（（p∨q）⟶（p∨r））。（附加律，或蕴析公理）

5.推理规则（或变形规则，我们用R表示）：

（1）（R_1）：将合式公式A中出现的初始符号（1）中的任意符号N全部代以某一合式公式B，从而得到合式公式A（N/B），称为代入。从A可得A（N/B）。这称为代入规则。

（2）（R_2）：从A和（A⟶B）或（¬A∨B），可得B。这称为分离规则。

（3）（R_3）：定义项和被定义项是等值的。如果A定义为B，那么从A可得B。这称为定义置换规则。

6.括号省略规则：

（1）公式最外的一对括号可省略。

（2）真值联结词的结合力依下列次序递减：

¬，∨，∧，⟶，⟷

因此，比如加析公理p⟶（p∨q）也可写成p⟶p∨q。

（二）语义部分　它是讲语言符号的意义和公式的真假的部分。

1.初始符号

（1）命题变项　相当于自然语言里的字母，这里列的是字母表，它包括无穷多的字母，每个字母都代表任意命题。

（2）真值联结词　¬是一元联结词，∨是二元联结词。其真值情况如下：

A	$\neg$A
1	0
0	1

A	B	(A$\vee$B)
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

（3）左右括号　括号可以重叠使用，比如蕴析公理$(q \longrightarrow r) \longrightarrow ((p \vee q) \longrightarrow (p \vee r))$。

2.形成规则

初始符号不能任意组合，只有合乎规则的组合才是句子。初始符号的各种组合都叫作符号序列。在命题演算中，合乎规则的序列叫作合式公式，也简称为公式。经过解释以后，合式公式是有意义的符号序列，不合式的都是没有意义的，不是句子。形成规则实际上是合式公式的定义。第（1）、（2）、（3）条是说，根据这三条构造起来的都是合式的。第（4）条是说，只有根据以上三条构造起来的式子才是合式的，其他没有。

3.定义

通过定义可以引入一些新的符号。本系统初始符号的联结词只有$\neg$和$\vee$两个，通过定义又引入$\longrightarrow$，$\wedge$，$\longleftrightarrow$三个新联结词。新符号的引入乃是概念的引入和分析。新引入的符号在某一特定的系统里虽不是初始的，然而它所表达的概念和思想在认识里却往往是重要的，也是我们所要研究的对象。例如真值蕴涵与合取，通过定义可以揭示其很重要的特征。

4.公理

命题演算是一个演绎系统，它要有一些真的公式作为出发点，这就是公理。第一条公理是说：如果p或p是真的，那么p就是真的。第二条公理是说：如果p是真的，那么p或q就是真的。第三条公理是说：如果p或q是真的，那么q或p就是真的。第四条公

理是说：如果一蕴涵式q⟶r是真的，那么(p∨q)⟶(p∨r)也是真的。这四个公理都是重言式，其真实性从直观上就很明显。

5.推理规则

（1）关于代入规则　只有命题变项p，q，r，s等才能被代入，而其他多于一个符号的公式，例如¬p都不能被代入。但是，对于代入的公式B是没有限制的。另外，在某一特定公式里，如果一种命题变项出现不止一次，那么在代入时必须到处都用同一公式B代替，不能用不同的公式代替，也不能有的不进行代替。

（2）关于分离规则　这实际上是充分条件的肯定式假言推理。

（3）关于定义置换规则　这里的置换和前面的代入是不一样的。置换要求置换公式和被置换公式是等值的，而且在被置换公式出现的某些位置上进行替换。代入则不要求代入公式和被代入公式是等值的，而且要在被代入公式出现的所有位置上进行替换。例如：p⟶p∨¬q，根据p∨¬q＝q⟶p可置换为p⟶(q→p)，而代入，比如p/r则为r⟶r∨¬q。

6.括号省略规则

括号是为了把符号分组，如果分组已经很清楚，有的括号就可以省略。整个公式最外的一对括号就可以省略。另外，按照联结词的结合力，¬最强，∨次之，∧第三，⟶较弱，⟷最弱，因此p⟶q⟷r∧p∨q就表明了这样的分组情况：(p⟶q)⟷(r∧(p∨q))。当然，括号省略只是一般规则，可以照此处理，但决非必须照此处理。有时为了增强直观性，也可以不省掉括号。

（三）导出规则　导出规则也是推理规则，但是它跟前述三条推理规则（代入、分离、定义置换）还有所不同。前述三条是

我们所讲的公理推理系统中最基本的推理规则，它决定着推理系统能否得以展开。导出规则就稍有不同，它对推理系统只起简化作用，它是基本推理规则的有机补充。如果没有导出规则，只按照前述三条推理规则进行推理证明，那么整个系统也可以展开下去，但是繁琐得多。导出规则一般都是直观性较强的推理规律，它可以大大简化推理证明。在后面将要进行的实际演算中，我们将逐渐运用导出规则，使推理证明逐渐简化（我们用“R导”表示导出规则）。

1. R导$_1$：从$A \vee B$可直接推出$B \vee A$。这条规则称为析取交换规则，实际上是前述公理第三条析取交换律$(p \vee q) \longrightarrow (q \vee p)$在分离规则下的推广。

2. R导$_2$：从$B \longrightarrow C$可直接推出$A \vee B \longrightarrow A \vee C$。这条规则称为附加规则，实际上是前述公理第四条附加律$(q \longrightarrow r) \longrightarrow ((p \vee q) \longrightarrow (p \vee r))$在分离规则下的推广。

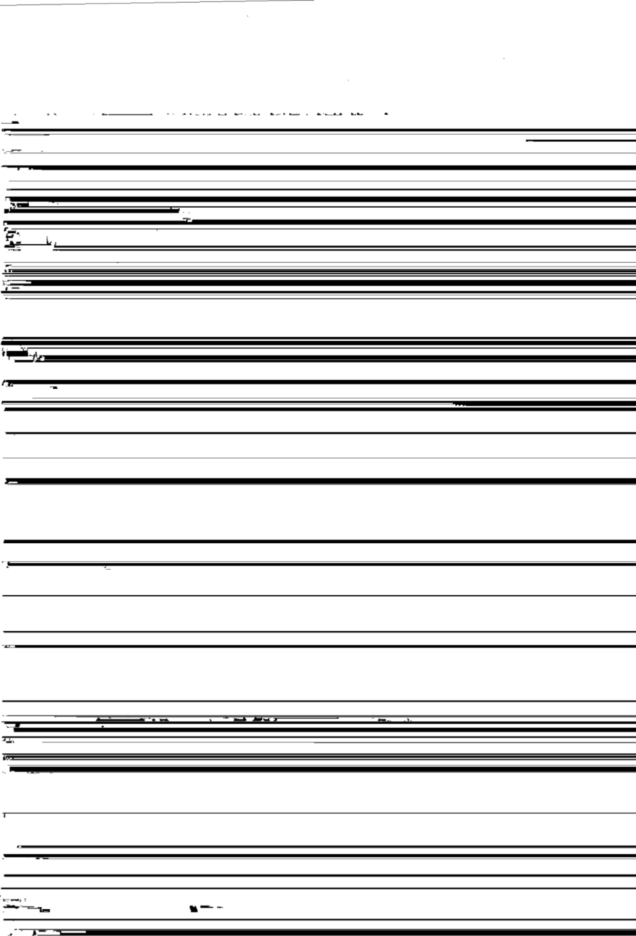
3. R导$_3$：从$B \longrightarrow C$和$A \longrightarrow B$，可直接推出$A \longrightarrow C$。这条规则称为三段论规则。

4. R导$_4$：从$A \longrightarrow B$可直接推出$\neg B \longrightarrow \neg A$。这条规则称为假言易位规则。

5. R导$_5$：如果A和B等值，即$A \longleftrightarrow B$，那么从$\Phi(A)$可推出$\Phi(B)$。Φ表示任意合式公式，$\Phi(A)$（或$\Phi(B)$）表示以A为变项（或以B为变项）的同一合式公式。这个规则称为基本置换规则，也可以作为定理加以证明，但严格的证明要应用数学归纳法，要施归纳于合式公式的构造。这里就从略了。此定理在以下最简单的情况下是正确的：

（1）A在$\Phi(A)$中只出现一次。

（2）$\Phi(A)$的形式是：①$\neg A$，②$C \vee A$或③$A \vee C$。根据形成规则，不论$\Phi(A)$的形式如何复杂，总是由多次重复地运用否定和析取构成的，合取、蕴涵和等值都可以定义为否定和析



汉语来研究符号形式系统，对象语言就是逻辑演算这个形式语言；而元语言是汉语。这里举出的对象语言恰是人工构造的形式语言，但并非对象语言必须是形式语言。例如，我们用汉语来研究英语，则英语是对象语言而汉语是元语言；我们用汉语来研究汉语，则对象语言和元语言就都是汉语。一般来说元语言（即工作语言或语法语言）大多是自然语言，当然也有人工符号语言，称为元符号语言。粗略地说，用元语言所陈述的关于对象语言的理论称为元理论或语法理论；研究语言符号的意义和公式的真假的理论称为语义理论。

下面是一系列定理证明（我们用T表示定理）：

T_1：$(q \longrightarrow r) \longrightarrow ((p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow r))$

它是说：如果$q \longrightarrow r$，那么，在$p \longrightarrow q$成立条件下可以得到$p \longrightarrow r$。其实这条定理等值于这种说法：如果$p \longrightarrow q$并且$q \longrightarrow r$，那么就可以得到$p \longrightarrow r$。很明显，这是连锁式假言三段论的变相形式。因此上面的定理又被称为三段论原则。

证明：

①$(q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \vee q \longrightarrow p \vee r)$　（A_4）

②$(q \longrightarrow r) \longrightarrow (\neg p \vee q \longrightarrow \neg p \vee r)$

（①R_1, $p/\neg p$）

③$(q \longrightarrow r) \longrightarrow ((p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow r))$

（D_1，R_3）（证毕）

解释一下。各证明式后的右端括弧里开列的是依据什么规则，如①行右端A_4表示援引的是“蕴析公理”，②行右端表示对①式使用以$\neg p$替代p的“代入规则”，③行右端表示按照蕴含定义，使用“定义置换规则”（即将$\neg p \vee q$改换为$p \longrightarrow q$等等）。以下各章节证明同。）

T_2：$p \longrightarrow p$

它是说：如果p，那么就p。这是同一律在命题演算中的表现，称

为同一原则。

证明：

①$p \longrightarrow p \vee q$　　（A_2）

②$p \longrightarrow p \vee p$　　（①R_1，q/p）

③$p \vee p \longrightarrow p$　　（A_1）

从②和③就已经可以明显看出，根据三段论原则就能得到$p \longrightarrow p$。但为了使初学者易于理解，我们还是详细写出后半段证明：

④$(q \longrightarrow r) \longrightarrow ((p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow r))$　　（T_1）

⑤$(p \vee p \longrightarrow p) \longrightarrow ((p \longrightarrow p \vee p) \longrightarrow (p \longrightarrow p))$

（④R_1，$q/p \vee p$，r/p）

⑥$(p \longrightarrow p \vee p) \longrightarrow (p \longrightarrow p)$　　（③，⑤R_2）

⑦$p \longrightarrow p$　　（②，⑥R_2）（证毕）

T_3：$\neg p \vee p$

它是说：非p或p，p假或p真。这在命题演算中是个典型的永真公式，它和下面的T_4统称为排中律。

证明：

①$p \longrightarrow p$　　（T_2）

②$\neg p \vee p$　　（①D_1）（证毕）

T_4：$p \vee \neg p$

它是T_3的析取交换，可根据A_3证得。

证明：

①$p \vee q \longrightarrow q \vee p$　　（A_3）

②$\neg p \vee p \longrightarrow p \vee \neg p$　　（①R_1，$p/\neg p$，q/p）

③$\neg p \vee p$　　（T_3）

④$p \vee \neg p$　　（②，③R_2）（证毕）

T_5：$p \longrightarrow \neg\neg p$

它是说：如果p，则非非p；或如果p真，则并非p假。它和下面的

T_6都是双重否定原则。

证明：

①$p \lor \neg p$ （T_4）

②$\neg p \lor \neg\neg p$ （①R_1，$p/\neg p$）

③$p \longrightarrow \neg\neg p$ （②D_1）（证毕）

T_6：$\neg\neg p \longrightarrow p$

它是说：如果并非p假，那么p一定真。根据$\longrightarrow$的定义，T_6可以变为$\neg\neg\neg p \lor p$。我们的证明可以在这里思考。

证明：

①$p \longrightarrow \neg\neg p$ （T_5）

②$\neg p \longrightarrow \neg\neg\neg p$ （①R_1，$p/\neg p$）

③$(q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \lor q \longrightarrow p \lor r)$ （A_4）

④$(\neg p \longrightarrow \neg\neg\neg p) \longrightarrow (p \lor \neg p \longrightarrow p \lor \neg\neg\neg p)$

（③R_1，$q/\neg p$，$r/\neg\neg\neg p$）

⑤$p \lor \neg p \longrightarrow p \lor \neg\neg\neg p$ （②，④R_2）

⑥$p \lor \neg p$ （T_4）

⑦$p \lor \neg\neg\neg p$ （⑤，⑥R_2）

⑧$p \lor q \longrightarrow q \lor p$ （A_3）

⑨$p \lor \neg\neg\neg p \longrightarrow \neg\neg\neg p \lor p$ （⑧R_1，$q/\neg\neg\neg p$）

⑩$\neg\neg\neg p \lor p$ （⑦，⑨R_2）

⑪$\neg\neg p \longrightarrow p$ （⑩D_1）（证毕）

T_7：$(p \longrightarrow q) \longrightarrow (\neg q \longrightarrow \neg p)$

它是说：如果p蕴涵q，那么非q蕴涵p。这是假言易位原则。

证明：

①$p \longrightarrow \neg\neg p$ （T_5）

②$q \longrightarrow \neg\neg q$ （①R_1，p/q）

③$(q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \lor q \longrightarrow p \lor r)$ （A_4）

④$(q \longrightarrow \neg\neg q) \longrightarrow (\neg p \lor q \longrightarrow \neg p \lor \neg\neg q)$

(③R_1, $p/\neg p$, $r/\neg\neg q$)

⑤ $\neg p\vee q\longrightarrow\neg p\vee\neg\neg q$　　(②,④R_2)

⑥ $p\vee q\longrightarrow q\vee p$　　(A_3)

⑦ $\neg p\vee\neg\neg q\longrightarrow\neg\neg q\vee\neg p$

(⑥R_1, $p/\neg p$, $q/\neg\neg q$)

⑧ $(q\longrightarrow r)\longrightarrow((p\longrightarrow q)\longrightarrow(p\longrightarrow r))$

(T_1)

⑨ $(\neg p\vee\neg\neg q\longrightarrow\neg\neg q\vee\neg p)\longrightarrow$

$((\neg p\vee q\longrightarrow\neg p\vee\neg\neg q)\longrightarrow$

$(\neg p\vee q\longrightarrow\neg\neg q\vee\neg p))$　　(⑧R_1, $p/\neg p\vee q$, $q/\neg p\vee\neg\neg q$, $r/\neg\neg q\vee\neg p$)

⑩ $(\neg p\vee q\longrightarrow\neg p\vee\neg\neg q)\longrightarrow$

$(\neg p\vee q\longrightarrow\neg\neg q\vee\neg p)$　　(⑦, ⑨R_2)

⑪ $\neg p\vee q\longrightarrow\neg\neg q\vee\neg p$　　(⑤, ⑩R_2)

⑫ $(p\longrightarrow q)\longrightarrow(\neg q\longrightarrow\neg p)$　　(⑪D_1)(证毕)

T_8: $\neg(p\wedge q)\longrightarrow\neg p\vee\neg q$

它是说：p并且q的否定蕴涵非p或非q。这是D·M律即德·摩根定理中关于合取的否定式问题。

证明：

① $\neg\neg p\longrightarrow p$　　(T_6)

② $\neg\neg(\neg p\vee\neg q)\longrightarrow\neg p\vee\neg q$　　(①R_1, $p/\neg p\vee\neg q$)

③ $\neg(p\wedge q)\longrightarrow\neg p\vee\neg q$　　(②D_2)(证毕)

T_9: $\neg p\vee\neg q\longrightarrow\neg(p\wedge q)$

它是说：如果非p或非q，那么就并非p且q；或如果p假或q假，那么就并非p和q同时为真。这是T_8的逆定理。

证明：

① $p\longrightarrow\neg\neg p$　　(T_5)

② $\neg p\vee\neg q\longrightarrow\neg\neg(\neg p\vee\neg q)$　　(①R_1, $p/\neg p\vee\neg q$)

③$\neg p \vee \neg q \longrightarrow \neg(p \wedge q)$　　　　（②D_2）（证毕）

T_8和T_9是互逆的，它们说明"p并且q"的否定等值于"非p或非q"。

以上的定理证明都比较详尽。下面的定理证明要简化一些，因此要用到导出规则。

T_{10}：$p \longrightarrow q \vee p$

这是A_2即加析公理的变形。

证明：

①$p \longrightarrow p \vee q$　　　　（A_2）

②$p \vee q \longrightarrow q \vee p$　　　　（A_3）

③$p \longrightarrow q \vee p$　　　　（R导$_3$）（证毕）

T_{11}：$\neg(p \vee q) \longrightarrow \neg p \wedge \neg q$

它是说：p或q的否定蕴涵非p并且非q。这是德·摩根定理中关于析取的否定式问题。

证明：

①$p \longrightarrow p$　　　　（T_2）

②$\neg(p \vee q) \longrightarrow \neg(p \vee q)$　　　　（R_1, $p/\neg(p \vee q)$）

③$\neg(p \vee q) \longrightarrow \neg(\neg\neg p \vee \neg\neg q)$　　（R导$_5$）

④$\neg(p \vee q) \longrightarrow \neg p \wedge \neg q$　　　　（D_2）（证毕）

T_{12}：$\neg p \wedge \neg q \longrightarrow \neg(p \vee q)$

它是说：如果非p并且非q，那么就并非p或q；或如果p假并且q假，那么就并非p真或q真。这是T_{11}的逆定理。

证明：

①$p \longrightarrow p$　　　　（T_2）

②$\neg(p \vee q) \longrightarrow \neg(p \vee q)$（$R_1$）

③$\neg(\neg\neg p \vee \neg\neg q) \longrightarrow \neg(p \vee q)$（R导$_5$）

④$\neg p \wedge \neg q \longrightarrow \neg(p \vee q)$　　（D_2）（证毕）

T_{11}和T_{12}是互逆的。它们是关于析取的否定式的德·摩根

定理。把这两个定理合起来就得到："并非（p或q）"等值于"非p并且非q"。

T_{13}：$p\wedge q\longrightarrow q\wedge p$

这是关于合取的交换律。前述公理3是关于析取的交换律。

证明：

①$p\vee q\longrightarrow q\vee p$　　（A_3）

②$\neg q\vee\neg p\longrightarrow\neg p\vee\neg q$　　（R_1）

③$\neg(\neg p\vee\neg q)\longrightarrow\neg(\neg q\vee\neg p)$　　（R导$_4$）

④$p\wedge q\longrightarrow q\wedge p$　　（D_2）（证毕）

T_{14}：$p\wedge q\longrightarrow p$

它是说：如果p和q都是真的，那么p就是真的。这是合取的分析式。

证明：

①$p\longrightarrow p\vee q$　　（A_2）

②$\neg p\longrightarrow\neg p\vee\neg q$　　（R_1）

③$\neg(\neg p\vee\neg q)\longrightarrow\neg\neg p$　　（R导$_4$）

④$p\wedge q\longrightarrow\neg\neg p$　　（D_2）

⑤$p\wedge q\longrightarrow p$　　（R导$_5$）（证毕）

T_{15}：$p\wedge q\longrightarrow q$

这和T_{14}是一个性质，都是合取的分析式。

证明：

①$p\longrightarrow q\vee p$　　（T_{10}）

②$\neg q\longrightarrow\neg p\vee\neg q$　　（R_1）

③$\neg(\neg p\vee\neg q)\longrightarrow\neg\neg q$　　（R导$_4$）

④$p\wedge q\longrightarrow q$　　（D_2，R导$_5$）（证毕）

T_{16}：$p\vee(q\vee r)\longrightarrow q\vee(p\vee r)$

它是说：把三个命题变项p，q，r用析取∨联结起来，不论先联结哪两个，$p\vee q$或$p\vee r$或$q\vee r$，然后再跟第三个联结起来，其

结果，虽公式不同而真值却相同。这是析取结合律。

证明：

①$p \longrightarrow q \vee p$ （T_{10}）

②$r \longrightarrow p \vee r$ （R_1）

③$q \vee r \longrightarrow q \vee (p \vee r)$ （A_4）

④$p \vee (q \vee r) \longrightarrow p \vee (q \vee (p \vee r))$ （A_4）

⑤$p \vee (q \vee (p \vee r)) \longrightarrow (q \vee (p \vee r)) \vee p$ （A_3，R_1）

⑥$p \vee (q \vee r) \longrightarrow (q \vee (p \vee r)) \vee p$ （R导$_3$）

⑦$p \longrightarrow q \vee p$ （T_{10}）

⑧$p \vee r \longrightarrow q \vee (p \vee r)$ （R_1）

⑨$p \longrightarrow p \vee r$ （A_2，R_1）

⑩$p \longrightarrow q \vee (p \vee r)$ （R导$_3$）

⑪$(q \vee (p \vee r)) \vee p \longrightarrow (q \vee (p \vee r)) \vee (q \vee (p \vee r))$ （A_4）

⑫$p \vee p \longrightarrow p$ （A_1）

⑬$(q \vee (p \vee r)) \vee (q \vee (p \vee r)) \longrightarrow q \vee (p \vee r)$ （R_1）

⑭$(q \vee (p \vee r)) \vee p \longrightarrow q \vee (p \vee r)$ （R导$_3$）

⑮$p \vee (q \vee r) \longrightarrow q \vee (p \vee r)$ （⑥，⑭R导$_3$）（证毕）

T_{17}：$p \vee (q \vee r) \longrightarrow (p \vee q) \vee r$

这仍然是析取结合律。

证明：

①$p \vee (q \vee r) \longrightarrow q \vee (p \vee r)$ （T_{16}）

②$p \vee (r \vee q) \longrightarrow r \vee (p \vee q)$ （R_1）

③$p \vee (q \vee r) \longrightarrow r \vee (p \vee q)$ （A_3，R导$_5$）

④$p \vee (q \vee r) \longrightarrow (p \vee q) \vee r$ （A_3，R导$_5$）（证毕）

T_{18}：$(p \vee q) \vee r \longrightarrow p \vee (q \wedge r)$

这还是析取结合律。

证明：

①$p\vee(q\vee r)\longrightarrow(p\vee q)\vee r$　　（T_{17}）

②$r\vee(q\vee p)\longrightarrow(r\vee q)\vee p$　　（R_1）

③$r\vee(p\vee q)\longrightarrow(q\vee r)\vee p$　　（A_3，R导$_5$）

④$(p\vee q)\vee r\longrightarrow p\vee(q\vee r)$　　（A_3，R导$_5$）（证毕）

T_{19}：$p\wedge(q\wedge r)\longrightarrow(p\wedge q)\wedge r$

它是说：把三个命题变项p，q，r用合取∧联结起来，不论 先联结哪两个，然后再跟第三个联结起来，其结果，虽公式不同而真值却相同。这是合取结合律。

证明：

①$(p\vee q)\vee r\longrightarrow p\vee(q\vee r)$　　（T_{18}）

②$(\neg p\vee\neg q)\vee\neg r\longrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee\neg r)$

（R_1）

③$\neg(\neg p\vee(\neg q\vee\neg r))\longrightarrow\neg((\neg p\vee\neg q)\vee\neg r)$

（R导$_4$）

④$\neg\neg p\wedge\neg(\neg q\vee\neg r)\longrightarrow\neg(\neg p\vee\neg q)\wedge\neg\neg r$

（D·M，R导$_5$）

⑤$\neg\neg p\wedge(q\wedge r)\longrightarrow(p\wedge q)\wedge\neg\neg r$　　（D_2）

⑥$p\wedge(q\wedge r)\longrightarrow(p\wedge q)\wedge r$　　（R导$_5$）（证毕）

T_{20}：$(p\wedge q)\wedge r\longrightarrow p\wedge(q\wedge r)$

这仍然是合取结合律。

证明：（方法同T_{19}，其中要引用T_{18}）。

T_{21}：$p\longrightarrow(q\longrightarrow p\wedge q)$

它是说：如果p真，那么又如果q也真，就得到p∧q都 真。这 是合取式的构成原则。

证明：

①$p\vee\neg p$　　（T_4）

②$(\neg p\vee\neg q)\vee\neg(\neg p\vee\neg q)$　　（R_1）

③ $(\neg p \vee \neg q) \vee (p \wedge q)$ (D_2)

④ $\neg p \vee (\neg q \vee (p \wedge q))$ (T_{18})

⑤ $p \longrightarrow (q \longrightarrow (p \wedge q))$ (D_1)（证毕）

T_{22}：$(p \longrightarrow (q \longrightarrow r)) \longrightarrow (q \longrightarrow (p \longrightarrow r))$

它是说：如果$(q \longrightarrow r)$是以p为条件，那么$(p \longrightarrow r)$就以q为条件。其中有个条件更换，所以称为条件互易原则。

证明：

① $p \vee (q \vee r) \longrightarrow q \vee (p \vee r)$ (T_{16})

② $\neg p \vee (\neg q \vee r) \longrightarrow \neg q \vee (\neg p \vee r)$ (R_1)

③ $(p \longrightarrow (q \longrightarrow r)) \longrightarrow (q \longrightarrow (p \longrightarrow r))$

(D_1)（证毕）

T_{23}：$(p \longrightarrow (q \longrightarrow r)) \longrightarrow (p \wedge q \longrightarrow r)$

它是说：如果$(q \longrightarrow r)$以p为条件，那么r就以$(p \wedge q)$为条件。其中p和q都是r的条件，所以此定理称为条件合取原则。

证明：

① $p \vee (q \vee r) \longrightarrow (p \vee q) \vee r$ (T_{17})

② $\neg p \vee (\neg q \vee r) \longrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$ (R_1)

③ $\neg p \vee (\neg q \vee r) \longrightarrow \neg\neg(\neg p \vee \neg q) \vee r$（R导$_5$）

④ $\neg p \vee (\neg q \vee r) \longrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r$ (D_2)

⑤ $(p \longrightarrow (q \longrightarrow r)) \longrightarrow ((p \wedge q) \longrightarrow r)$

(D_1)（证毕）

T_{24}：$(p \wedge q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \longrightarrow (q \longrightarrow r))$

这是T_{23}的逆定理。

证明：（方法同T_{23}，其中要用到T_{18}）。

T_{25}：$(p \longrightarrow (p \longrightarrow q)) \longrightarrow (p \longrightarrow q)$

它是说：如果p是$p \longrightarrow q$的条件，那么就可以消除这一条件。这是条件融合原则。

证明：

①$p \vee p \longrightarrow p$　　　　　　　　　　　　（A_1）

②$\neg p \vee \neg p \longrightarrow \neg p$　　　　　　　　　　（R_1）

③$q \vee (\neg p \vee \neg p) \longrightarrow q \vee \neg p$　　　　　（A_4）

④$\neg p \vee (\neg p \vee q) \longrightarrow \neg p \vee q$　　　　（A_3, T_{16}, R导$_5$）

⑤$(p \longrightarrow (p \longrightarrow q)) \longrightarrow (p \longrightarrow q)$　（D_1）（证毕）

T_{26}：$(p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow (p \longrightarrow q))$

这是T_{25}的逆定理。

证明：（方法同T_{25}，用到A_2）。

T_{27}：$p \vee (q \wedge r) \longrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

我们将要讲的T_{27}，T_{28}，T_{29}，T_{30}都是分配律。在普通数学中，乘法对于加法是可分配的，但是加法对于乘法不能分配。而在命题演算里，析取对于合取，合取对于析取都可分配。T_{27}，T_{28}说明析取对于合取是可分配的。T_{29}，T_{30}说明合取对于析取是可分配的。

证明：

①$q \wedge r \longrightarrow q$　　　　　　　　　　　　（T_{14}，R_1）

②$p \vee (q \wedge r) \longrightarrow p \vee q$　　　　　　　（A_4）

③$q \wedge r \longrightarrow r$　　　　　　　　　　　　（T_{15}，R_1）

④$p \vee (q \wedge r) \longrightarrow p \vee r$　　　　　　　（A_4）

⑤$p \longrightarrow (q \longrightarrow p \wedge q)$　　　　　　　　（T_{21}）

⑥$p \vee q \longrightarrow (p \vee r \longrightarrow p \vee q \wedge p \vee r)$　　（R_1）

⑦$p \vee (q \wedge r) \longrightarrow (p \vee r \longrightarrow p \vee q \wedge p \vee r)$

（①，③R导$_3$）

⑧$p \vee r \longrightarrow (p \vee (q \wedge r) \longrightarrow p \vee q \wedge p \vee r)$

（T_{22}，R导$_5$）

⑨$p \vee (q \wedge r) \longrightarrow (p \vee (q \wedge r) \longrightarrow p \vee q \wedge p \vee r)$

（②，④R导$_3$）

⑩$p \vee (q \wedge r) \longrightarrow p \vee q \wedge p \vee r$　　（T_{25}，R导$_5$）（证毕）

T_{28}：$p \vee q \wedge p \vee r \longrightarrow p \vee (q \wedge r)$

这是T_{27}的逆定理。

证明：

①$q \longrightarrow (r \longrightarrow q \wedge r)$　　（T_{21}，R_1）

②$(r \longrightarrow q \wedge r) \longrightarrow (p \vee r \longrightarrow p \vee (q \wedge r))$　　（A_4，R_1）

③$q \longrightarrow (p \vee r \longrightarrow p \vee (q \wedge r))$　　（R导$_3$）

④$p \vee r \longrightarrow (q \longrightarrow p \vee (q \wedge r))$　　（T_{22}）

⑤$(q \longrightarrow p \vee (q \wedge r)) \longrightarrow (p \vee q \longrightarrow p \vee (p \vee (q \wedge r)))$　　（A_4，R_1）

⑥$(q \longrightarrow p \vee (q \wedge r)) \longrightarrow (p \vee q \longrightarrow (p \vee p) \vee (q \wedge r))$　　（T_{16}，R_5）

⑦$(q \longrightarrow p \vee (q \wedge r)) \longrightarrow (p \vee q \longrightarrow p \vee (q \wedge r))$　　（R_5）

⑧$p \vee r \longrightarrow (p \vee q \longrightarrow p \vee (q \wedge r))$　　（④,⑦ R导$_3$）

⑨$p \vee r \wedge p \vee q \longrightarrow p \vee (q \wedge r)$　　（T_{23}）

⑩$p \vee q \wedge p \vee r \longrightarrow p \vee (q \wedge r)$　　（T_{13}）（证毕）

T_{29}：$p \wedge q \vee r \longrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

证明：

①$\neg p \vee \neg q \wedge \neg p \vee \neg r \longrightarrow \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$　　（T_{28}，R_1）

②$\neg(\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)) \longrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q \wedge \neg p \vee \neg r)$　　（R导$_4$）

③$\neg\neg p \wedge \neg(\neg q \wedge \neg r) \longrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(\neg p \vee \neg r)$　　（D·M，R导$_5$）

④$\neg\neg p \wedge \neg\neg q \vee \neg\neg r \longrightarrow (\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \vee (\neg\neg p \wedge \neg\neg r)$　　（D·M，R导$_5$）

⑤$p\wedge q\vee r\longrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$　　(T_6, R导$_6$)（证毕）

T_{30}：$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)\longrightarrow p\wedge(q\vee r)$

这是T_{29}的逆定理。

证明：（方法同T_{29}，要用到T_{27}）。

T_{31}：$(p\longrightarrow q)\wedge(p\longrightarrow r)\longrightarrow(p\longrightarrow q\wedge r)$

它是说：如果p则q，如果p则r，那么，如果p则q并且r。

证明：

①$p\vee q\wedge p\vee r\longrightarrow p\vee(q\wedge r)$　　(T_{28})

②$\neg p\vee q\wedge\neg p\vee r\longrightarrow\neg p\vee(q\wedge r)$　　(R_1)

③$(p\longrightarrow q)\wedge(p\longrightarrow r)\longrightarrow(p\longrightarrow q\wedge r)$　(D_1)

（证毕）

T_{32}：$p\longleftrightarrow\neg\neg p$

证明：(T_5，T_6，R导$_6$)。

T_{33}：$\neg(p\vee q)\longleftrightarrow\neg p\wedge\neg q$

证明：(T_{11}，T_{12}，R导$_6$)。

T_{34}：$\neg(p\wedge q)\longleftrightarrow\neg p\vee\neg q$

证明：(T_8，T_9，R导$_6$)。

T_{35}：$p\longleftrightarrow p$

证明：(T_2，R导$_6$)。

T_{36}：$(p\longrightarrow q)\longleftrightarrow(\neg p\vee q)$

证明：(T_{35}，R_3)。

T_{37}：$(p\longleftrightarrow q)\longleftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)$

证明：(T_{35}，R_3)。

T_{38}：$(p\longleftrightarrow q)\longrightarrow(\neg p\longleftrightarrow\neg q)$

证明：

①$(p\longleftrightarrow q)\longrightarrow(p\longrightarrow q)\wedge(q\longrightarrow p)$　　(T_2, R_1, R_3)

②$(p\longleftrightarrow q)\longrightarrow(p\longrightarrow q)$　　(T_{14})

③$(p\longleftrightarrow q)\longrightarrow(\neg q\longrightarrow\neg p)$　　(R导$_4$)

④ $(p\longleftrightarrow q)\longrightarrow(q\longrightarrow p)$ （T_{15}）

⑤ $(p\longleftrightarrow q)\longrightarrow(\neg p\longrightarrow\neg q)$ （R导$_4$）

⑥ $(p\longleftrightarrow q)\longrightarrow(\neg p\longrightarrow\neg q)\wedge(\neg q\longrightarrow\neg p)$ （T_{31}）

⑦ $(p\longleftrightarrow q)\longrightarrow(\neg p\longleftrightarrow\neg q)$ （D_3）（证毕）

T_{39}：$p\longleftrightarrow p\wedge(q\vee\neg q)$

它是说：p等值于p加永真命题；或者说，p减永真命题还等于p。这是合取加真原则。

证明：

①$p\wedge(q\vee\neg q)\longrightarrow p$ （T_{14}，R_1）

②$p\longrightarrow(q\vee\neg q\longrightarrow p\wedge(q\vee\neg q))$ （T_{21}，R_1）

③$q\vee\neg q\longrightarrow(p\longrightarrow p\wedge(q\vee\neg q))$ （T_{22}）

④$p\longrightarrow p\wedge(q\vee\neg q)$ （T_4，R_2）

⑤$p\longleftrightarrow p\wedge(q\vee\neg q)$ （①，②T_{37}）（证毕）

T_{40}：$p\longleftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)$

它是说：p等值于p或永假命题；或者说，p减永假命题还等于p。这是析取加假原则。

证明：（T_{39}，R导$_8$）。

T_{41}：$p\longrightarrow(q\longrightarrow p)$

它是说：真命题p为任何命题q所蕴涵。这是一条蕴涵怪论。

证明：

①$p\longrightarrow q\vee p$ （T_{10}）

②$p\longrightarrow\neg q\vee p$ （R_1）

③$p\longrightarrow(q\longrightarrow p)$ （D_1）（证毕）

T_{42}：$\neg p\longrightarrow(p\longrightarrow q)$

它是说：假命题p蕴涵任何命题q。这是又一条蕴涵怪论。

证明：

①$p\longrightarrow p\vee q$ （A_2）

②$\neg p\longrightarrow\neg p\vee q$ （R_1）

③$\neg p \longrightarrow (p \longrightarrow q)$ （D_1）（证毕）

T_{43}：$p \longleftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q \vee r)$

证明：

①$q \vee \neg q \longrightarrow q \vee \neg q \vee r$ （A_2）

②$q \vee \neg q \longrightarrow (q \vee \neg q \vee r \longrightarrow q \vee \neg q)$ （T_{41}）

③$q \vee \neg q \vee r \longrightarrow q \vee \neg q$ （T_4, R_2）

④$p \longleftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q \vee r)$ （T_{39}，R导$_6$）（证毕）

T_{44}：$p \longleftrightarrow p \vee (q \wedge \neg q \wedge r)$

证明：（T_{43}，R导$_8$）。

T_{45}：$(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

证明：

①$(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ （T_{37}）

②$(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q)$
$\vee (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)$ （T_{29}）

③$(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ （T_{40}，R导$_5$）

（证毕）

以上是公理推理系统的若干定理证明，或者说若干定理推演过程。这些定理在没被证明之前只能称作合式公式；当然，合式公式在没被鉴定之前也只能称作符号序列。所有定理都是重言式。重言式有很多，以上定理只是其中的一个部分。从每条定理的证明中我们可以看到，命题演算中的形式证明是一个有次序的公式序列，其中每一公式或是一条公理，或是一条已证定理，或是由本序列中次序在前的两个公式经过分离得到的（称为在前的两个公式的直接的逻辑后承），最后一个公式就是所要证明的定理。上面“或是一条已证定理”这句话原则上可以省略，因为我们可以不引用已证定理，而代之以对该定理的证明。由于每一条公理都是定理，因而最简单的形式证明就是由公式构成的序列。

三　自然推理系统

命题演算的自然推理系统也是一种形式系统。所谓自然推理，就是其出发点不是公理而是推理时引进的假设，或者说其公理集合为零而只靠假设和推理规则进行的形式演绎推理。由于这种推理很像自然科学尤其是数学中常用的那些演绎推理（如定律、定理的证明），因此称为“自然推理”。自然推理系统是在二十世纪三十年代首次出现的，我们在这里只作一些简单的和直观的介绍。

（一）*初始基础*　主要是推理语言和推理规则问题。这些问题原本都是一种人为规定，但它决不是任意规定的，而是对各种各样具体推理的客观反映。

关于推理语言。自然推理的语言就是命题逻辑的语言，它是一种人工符号语言。从形式上看，一种语言应由两部分构成：第一部分，字母表或初始符号的集合（如同自然语言中的词汇和标点符号的集合）；第二部分，形成有独立含义的语言单位（语句）的规则，即形成合式公式的规则，我们称之为形成规则。

1．初始符号

（1）命题变项：p，q，r，s，p_1，……

（2）逻辑符号（逻辑常项）：否定$\neg$，析取$\vee$，合取$\wedge$，蕴涵$\longrightarrow$，等值$\longleftrightarrow$。

（3）技术符号：（，）

2．形成规则

（1）命题变项是合式公式。

（2）如果A是合式公式，那么$\neg$A是合式公式。

（3）如果A和B是合式公式，那么$A \vee B$，$A \wedge B$，$A \longrightarrow B$，$A \longleftrightarrow B$也都是合式公式。

（4）只有以上三条中指出的才是合式公式。

这里所使用的大写拉丁字母A，B…不属于我们所讨论的命题逻辑语言，它属于我们为了讨论命题逻辑语言而采用的另一种工具性的语言。我们称前者为对象语言，称后者为元语言或语法语言。所谓对象语言就是被人们讨论的对象的语言；所谓元语言就是用于讨论对象语言的语言。例如，在一本用汉语写的英语语法书中，凡英语都是对象语言，而汉语则是元语言。上述用元语言变项A，B…所写的公式$\neg A$，$A\vee B$，$A\wedge B$，$A\longrightarrow B$，$A\longleftrightarrow B$不是对象语言的公式，而是特殊种类的公式模式，它们中的A，B，…可以代入任何合式公式，象$A\vee B$可以是公式$p\vee q$，$(p\longrightarrow q)\vee(p\longrightarrow r)$，$p\vee(q\wedge r)$等等。

关于推理规则（即变形规则）。自然推理的推理规则可以用一些推理模式表示。对于每个逻辑常项都有两种模式：一种是引入这一常项，即引入规则；另一种是销去这一常项，即销去规则。为清楚起见，我们列表如下：

引入规则		销去规则	
$\longleftrightarrow_+$	$\dfrac{A\longrightarrow B \quad B\longrightarrow A}{A\longleftrightarrow B}$	$\longleftrightarrow_-$	$\dfrac{A\longleftrightarrow B}{A\longrightarrow B}$，$\dfrac{A\longleftrightarrow B}{B\longrightarrow A}$
$\longrightarrow_+$	$\dfrac{(A)\vdash B}{A\longrightarrow B}$	$\longrightarrow_-$	$\dfrac{A,\ A\longrightarrow B}{B}$
$\wedge_+$	$\dfrac{A,\ B}{A\wedge B}$	$\wedge_-$	$\dfrac{A\wedge B}{A}$，$\dfrac{A\wedge B}{B}$
$\vee_+$	$\dfrac{A}{A\vee B}$，$\dfrac{B}{A\vee B}$	$\vee_-$	$\dfrac{A\vee B,\ (A)\vdash C,\ (B)\vdash C}{C}$
$\neg_+$	$\dfrac{(A)\vdash B \quad (A)\vdash\neg B}{\neg A}$	$\neg_-$	$\dfrac{\neg\neg A}{A}$

先作些说明：1、符号+表引入，如$\wedge_+$即合取引入；符号－表销去，如$\wedge_-$即合取消去。2、模式中横线上的公式为推演的根据，横线下的公式是结论。3、（A）⊢B表示以A为假设公式，从而得到公式B的一个推演。4、横线上外面有圆括号的公式，例如（A），只是暂时的假设，推理模式的结论不再以它为前提。这种公式被称为在某一模式中被解除的假设公式。

我们再作些具体解释：

1．关于等值　$\longleftrightarrow_+$和$\longleftrightarrow_-$都是根据等值$\longleftrightarrow$的真值含义而形成的。只要有$A\longrightarrow B$和$B\longrightarrow A$的前提，就能得到$A\longleftrightarrow B$的结论，即为等值引入$\longleftrightarrow_+$。反过来，只要有$A\longleftrightarrow B$的前提，就能得到$A\longrightarrow B$或$B\longrightarrow A$的结论，即为等值销去$\longleftrightarrow_-$。

2．关于蕴涵　在$\longrightarrow_+$和$\longrightarrow_-$当中，比较好理解的是$\longrightarrow_-$，它相当于分离规则，或肯定式假言推理。$\longrightarrow_+$则比较复杂些。（A）⊢B表示前提中假设了A从而可以推演出B，$A\longrightarrow B$表示结论就可得到A蕴涵B。A是被解除了的假设公式，它不是结论（$A\longrightarrow B$）的前提。但是整个推演（A）⊢B却是结论的根据。这跟数学中的实际推理情况相一致。比如数学中要证明"如果A那么B"，其方法不是直接去证明A蕴涵B即"$A\longrightarrow B$"，而是从假设A出发，逻辑地推演出B来，即（A）⊢B，从而得出"$A\longrightarrow B$"的结论。

3．关于合取　$\wedge_+$是说由公式A和B可推出公式$A\wedge B$。$\wedge_-$是说由公式$A\wedge B$可推出A或B。

4．关于析取　$\vee_+$是说由公式A可推出$A\vee B$，由公式B可推出$A\vee B$。$\vee_-$是所谓的分情况证明方法。C是我们所要证明的命题。设$A\vee B$穷尽了一切可能的情况。虽然我们不知A和B何者为真，但是，如果能够证明，从A可推出C，从B也可推出C，那么C就得证。$A\vee B$真是C真的前提，（A）和（B）都是在模式中被解除的假设公式。

5．关于否定　$\neg_+$是说，如果从假设的A可以推出B，又可以推出$\neg$B，那么从A就可以推出逻辑矛盾，因而得出$\neg$A。很明显，$\neg$A不以A为前提。（A）是在本模式中被解除的假设公式。$\neg_-$是双重否定的前提可以推出肯定的结论。

我们将假设公式用（W）来表示，它代表了前述（A），（B）等。

（二）证明方法　即证明中的基本程序。

1．直接证明　对于跟如下模式

$A_1 \longrightarrow (A_2 \longrightarrow \cdots (An \longrightarrow C) \cdots)$

相同的公式，即多重蕴涵的直接证明，可按如下步骤进行：（1）以公式A_1，A_2，…，An中的任何一个作为假设（记为(W)）；（2）从证明序列中前面的公式，根据某一推理规则推出一个公式；（3）以前已证明过的公式。根据这样三步证明，如果得到了以C为结尾的公式，那么我们就说这样的证明序列是待证公式的直接证明。

2．间接证明　仍然对于跟模式

$A_1 \longrightarrow (A_2 \longrightarrow \cdots (An \longrightarrow C) \cdots)$

相同的公式的证明，可按如下步骤进行：（1）以公式A_1，A_2，…，An中的任何一个作为假设（记为（W））；（2）以跟公式C相矛盾的公式作为间接证明假设（记为：间（W））；（3）从证明序列中前面的公式，根据某一推理规则推出一个公式；（4）以前已证明过的公式。根据这样四步证明，如果该序列包括一对矛盾着的公式，那么我们说前述间接证明假设（间(W)）错误，而公式C成立，这就是公式的间接证明。

3．增加补充假设的证明　仍然对于跟模式

$A_1 \longrightarrow (A_2 \longrightarrow \cdots (An \longrightarrow C) \cdots)$

相同的公式的证明，可按如下步骤进行：（1）以公式A_1，A_2，…，An中的任何一个作为假设（记为（W））；（2）可以增加

任意公式B作为证明的补充假设（记为：补（W）），如通过原假设和补充假设而得到公式C，那么可以把蕴涵式B⟶C纳入原证明，从而得证：$A_1 \longrightarrow (A_2 \longrightarrow \cdots (An \longrightarrow (B \longrightarrow C))\cdots)$。对于补充假设的编号，我们在原假设后排列，比如原假设为①，补充假设就为$①_1$，$①_2$等。

（三）定理证明　任何一种推理系统，定理证明都是很重要部分。证明的技巧性也都表现在这一部分。

T_1：$(p \longrightarrow q) \longrightarrow ((q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \longrightarrow r))$

证明：

①$p \longrightarrow q$　（（W））

②$q \longrightarrow r$　（（W））

③p　（（W））

④q　（①，③，$\longrightarrow_-$）

⑤r　（②，④，$\longrightarrow_-$）

⑥$(p \longrightarrow q) \longrightarrow ((q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \longrightarrow r))$

（①，②，③，⑤，$\longrightarrow_+$）（证毕）

T_2：$(p \wedge q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \longrightarrow (q \longrightarrow r))$

证明：

①$p \wedge q \longrightarrow r$　（（W））

②p　（（W））

③q　（（W））

④$p \wedge q$　（②，③，$\wedge_+$）

⑤r　（①，④，$\longrightarrow_-$）

⑥$(p \wedge q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \longrightarrow (q \longrightarrow r))$

（①，②，③，⑤，$\longrightarrow_+$）（证毕）

T_3：$(p \longrightarrow (q \longrightarrow r)) \longrightarrow (p \wedge q \longrightarrow r)$

证明：

①$p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$　（（W））

②p　　　　　　　　　　((W))

③q　　　　　　　　　　((W))

④$p\wedge q$　　　　　　　(②，③，$\wedge_+$)

⑤$q\longrightarrow r$　　　　　(①，②，$\longrightarrow_-$)

⑥r　　　　　　　　　　(④，③，$\longrightarrow_-$)

⑦(①,④,⑥,$\longrightarrow_+$)　　　(证毕。我们省略原公式)

T_4：$q\longrightarrow q$

证明：

①$q\longrightarrow q$　　　　　((W))

②q　　　　　　　　　((W))

③q　　　　　　　　　(①，②，$\longrightarrow_-$)

④(②，③$\longrightarrow_+$)　　　(证毕)

T_5：$p\vee q\longrightarrow((p\longrightarrow q)\longrightarrow q)$

证明：

①$p\vee q$　　　　　　　((W))

②$p\longrightarrow q$　　　　　((W))

③$q\longrightarrow q$　　　　　(T_4)

④q　　　　　　　　　(①，②，③，$\vee_-$)

⑤(①，②，④，$\longrightarrow_+$)　(证毕)

T_6：$(p\longrightarrow(q\longrightarrow r))\longrightarrow(q\longrightarrow(p\longrightarrow r))$

证明：

①$p\longrightarrow(q\longrightarrow r)$　　((W))

②q　　　　　　　　　((W))

③p　　　　　　　　　((W))

④$q\longrightarrow r$　　　　　(①，③，$\longrightarrow_-$)

⑤r　　　　　　　　　(④，②，$\longrightarrow_-$)

⑥(①，②，③，⑤，$\longrightarrow_+$)　(证毕)

T_7：$(p\longrightarrow q)\wedge\neg q\longrightarrow\neg p$

证明：

①（p⟶q）∧¬q （(W)）

②p （间(W)）

③p⟶q （①，∧₋）

④q （③，②，⟶₋）

⑤¬q （①，∧₋）

⑥¬p （④，⑤，矛盾）

⑦（①，⑥，⟶₊） （证毕）

T_8：¬p⟶（p⟶q）

证明：

①¬p （(W)）

②p （(W)）

③¬q （间(W)）

④q （①，②，矛盾）

⑤（①，②，④，⟶₊） （证毕）

T_9：（（p∨q）∧¬p）⟶q

证明：

①（p∨q）∧¬p （(W)）

②p∨q （①，∧₋）

③¬p （①，∧₋）

④¬p⟶（p⟶q） （T_8）

⑤p⟶q （④，③，⟶₋）

⑥q⟶q （T_4）

⑦q （②，⑤，⑥，∨₋）

⑧（①，⑦，⟶₊） （证毕）

T_{10}：（（p∨q）∧¬q）⟶p

证明：（方法同T_9）。

我们知道，每条定理都反映一定的推理规律，因此它们都可

以当作现成的推理规则来使用。由定理转化来的推理规则称作导出规则。严格地说，导出规则的定义是：如果对一个逻辑系统添加某一规则而得到与它等价的逻辑系统，则该规则在这一逻辑系统中称作导出规则。导出规则的应用只能使逻辑证明简化，并不能增加相应逻辑系统中可证公式的总量。

去∨导出规则一：

由T_9得：

$$\frac{\neg A,\ A\vee B}{B}$$

由T_{10}得：

$$\frac{\neg B,\ A\vee B}{A}$$

T_{11}：$p\longrightarrow\neg\neg p$

证明：

①p	（(W)）
②$\neg\neg\neg p$	（间(W)）
③$\neg p$	（②$\neg_-$）
④$\neg\neg p$	（①，③矛盾）
⑤（①，④，$\longrightarrow_+$）	（证毕）

由T_{11}得引$\neg$导出规则二：

$$\frac{A}{\neg\neg A}$$

T_{12}：$(p\longrightarrow q)\wedge\neg q\longrightarrow\neg p$

证明：

①$(p\longrightarrow q)\wedge\neg q$	（(W)）
②$\neg\neg p$	（间(W)）
③p	（②$\neg_-$）
④$p\longrightarrow q$	（①$\wedge_-$）
⑤q	（④，③，$\longrightarrow_-$）
⑥$\neg q$	（①$\wedge_-$）
⑦$\neg\neg\neg p$	（⑤，⑥矛盾）

⑧$\neg p$ （⑦$\neg_{-}$）

⑨（①，⑧，$\longrightarrow_{+}$） （证毕）

由T_{12}得去$\longrightarrow$导出规则三：

$$\frac{\neg B,\ A\longrightarrow B}{\neg A}$$

我们在追补由T_{1}得传$\longrightarrow$导出规则四：

$$\frac{A\longrightarrow B,\ B\longrightarrow C}{A\longrightarrow C}$$

T_{13}：$\neg(p\vee q)\longleftrightarrow\neg p\wedge\neg q$

证明：

甲①$\neg(p\vee q)$ （（W））

①$_1$ p （补（W））

①$_2$ $p\vee q$ （①$_1$ $\vee_{+}$）

②$\neg p$ （①，①$_2$矛盾）

②$_1$ q （补（W））

②$_2$ $p\vee q$ （②$_1$ $\vee_{+}$）

③$\neg q$ （①，②$_2$矛盾）

④$\neg p\wedge\neg q$ （②，③，$\wedge_{+}$）

⑤（①，④，$\longrightarrow_{+}$）

乙①$\neg p\wedge\neg q$ （（W））

②$p\vee q$ （间（W））

③$\neg p$ （①$\wedge_{-}$）

④$\neg q$ （①$\wedge_{-}$）

⑤q （②，③，去$\vee$导出）

⑥$\neg(p\vee q)$ （④，⑤矛盾）

⑦（①，⑥，$\longrightarrow_{+}$）

丙①（甲，乙，$\longleftrightarrow_{+}$）（证毕）

由T_{13}得$\neg\vee$导出规则五：

$$\frac{\neg(A\vee B)}{\neg A\wedge\neg B} \qquad \frac{\neg(A\vee B)}{\neg A,\ \neg B}$$

T_{14}: $(p\longrightarrow q)\wedge(r\longrightarrow s)\wedge(p\vee r)\longrightarrow(q\vee s)$

证明：

①$p\longrightarrow q$ （(W)）

②$r\longrightarrow s$ （(W)）

③$p\vee r$ （(W)）

$①_1 p$ （补(W)）

$①_2 q$ （①，$①_2$，$\longrightarrow_-$）

$①_3 q\vee s$ （$①_2\vee_+$）

$②_1 r$ （补(W)）

$②_2 s$ （②，$②_1$，$\longrightarrow_-$）

$②_3 q\vee s$ （$②_2\vee_+$）

④$q\vee s$ （③，$①_1\to①_3$，$②_1\to②_3$，$\vee_-$）

⑤（①，②，③，④，$\longrightarrow_+$） （证毕）

T_{15}: $p\wedge(q\vee r)\longleftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

证明：

甲①$p\wedge(q\vee r)$ （(W)）

②p （①$\wedge_-$）

③$q\vee r$ （①$\wedge_-$）

$②_1 q$ （补(W)）

$②_2 p\wedge q$ （②，$②_1$，$\wedge_+$）

$③_1 r$ （补(W)）

$③_2 p\wedge r$ （②，$③_1$，$\wedge_+$）

④$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ （$②_1\to②_2$，$③_1\to③_2$，③，肯定导出）

⑤（①，④，$\longrightarrow_+$）

乙①$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ （(W)）

①$_1$p∧q　　（补(W)）

①$_2$p　　（①$_1$∧$_-$）

①$_3$q　　（①$_1$∧$_-$）

①$_4$q∨r　　（①$_3$∨$_+$）

①$_5$p∧（q∨r）　　（①$_2$，①$_4$，∧$_+$）

①$_6$p∧r　　（补(W)）

①$_7$p　　（①$_6$∧$_-$）

①$_8$r　　（①$_6$∧$_-$）

①$_9$q∨r　　（①$_8$∨$_+$）

①$_{10}$p∧（q∨r）　　（①$_7$，①$_9$，∧$_+$）

②p∧（q∨r）　　（①$_1$→①$_5$，①$_6$→①$_{10}$，①，∨$_-$

③（①，②，⟶$_+$）

丙①（甲，乙，⟷$_+$）　　（证毕）

T$_{16}$：（p⟶q）∧（r⟶s）∧（¬q∨¬s）⟶（¬p∨¬r）

证明：

①（p⟶q）∧（r⟶s）∧（¬q∨¬s）　　（(W)）

②p⟶q　　（①∧$_-$）

③r⟶s　　（①∧$_-$）

④¬q∨¬s　　（①∧$_-$）

②$_1$¬q　　（补(W)）

②$_2$¬p　　（②，②$_1$，去⟶导出）

②$_3$¬p∨¬r　　（②$_2$∨$_+$）

③$_1$¬s　　（补(W)）

③$_2$¬r　　（③，③$_1$，去⟶导出）

③$_3$¬p∨¬r　　（③$_2$∨$_+$）

⑤¬p∨¬r　　（②$_1$⟶②$_3$，③$_1$⟶③$_3$，④，∨$_-$）

⑥（①，⑤，$\longrightarrow_+$）（证毕）

由T_{14}得肯定导出规则六：

$$\frac{(A\longrightarrow B)\wedge(C\longrightarrow D),\ A\vee C}{B\vee D}$$

由T_{16}得否定导出规则七：

$$\frac{(A\longrightarrow B)\wedge(C\longrightarrow D),\ \neg B\vee\neg D}{\neg A\vee\neg C}$$

T_{17}：$(p\wedge q\longrightarrow r)\longleftrightarrow(p\longrightarrow(q\longrightarrow r))$

证明：

甲①$p\wedge q\longrightarrow r$　（（W））

②p　（（W））

$①_1$ $p\wedge q$　（补（W））

$①_2$ q　（$①_1\wedge_-$）

$①_3$ r　（$①_1$，①，$\longrightarrow_-$）

$①_4$ $q\longrightarrow r$　（$①_2$，$①_3$，$\longrightarrow_+$）

③$p\longrightarrow(q\longrightarrow r)$　（②，$①_4$，$\longrightarrow_+$）

④（①，③，$\longrightarrow_+$）

乙①$p\longrightarrow(q\longrightarrow r)$　（（W））

$①_1$ $p\wedge q$　（补（W））

$①_2$ p　（$①_1\wedge_-$）

$①_3$ q　（$①_1\wedge_-$）

$①_4$ $q\longrightarrow r$　（①，$①_2$，$\longrightarrow_-$）

$①_5$ r　（$①_4$，$①_3$，$\longrightarrow_-$）

$①_6$ $p\wedge q\longrightarrow r$　（$①_1$，$①_5$，$\longrightarrow_+$）

②（①，$①_6$，$\longrightarrow_+$）

丙①（甲，乙，$\longleftrightarrow_+$）（证毕）

由T_{17}得条件导出规则八：

$$\frac{A\wedge B\longrightarrow C}{A\longrightarrow(B\longrightarrow C)}\qquad\frac{A\longrightarrow(B\longrightarrow C)}{A\wedge B\longrightarrow C}$$

T_{18}：$p \longleftrightarrow (p \vee p)$

证明：

甲①p （（W））

②$p \vee p$ （①$\vee_+$）

③（①，②，$\longrightarrow_+$）

乙①$p \vee p$ （（W））

②$\neg p$ （间（W））

③p （①去$\vee$导出）

④p （②，③，矛盾）

⑤（①，④，$\longrightarrow_+$）

丙①（甲、乙，$\longleftrightarrow_+$） （证毕）

由T_{18}得附加导出规则九：

$$\frac{A}{A \vee A} \qquad \frac{A \vee A}{A}$$

T_{19}：$\neg(p \wedge q) \longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$

证明：

甲①$\neg(p \wedge q)$ （（W））

②$\neg(\neg p \vee \neg q)$ （间（W））

③$\neg\neg p$ （②$\neg\vee$导出）

④$\neg\neg q$ （②$\neg\vee$导出）

⑤p （③$\neg_-$）

⑥q （③$\neg_-$）

⑦$p \wedge q$ （⑤，⑥，$\wedge_+$）

⑧$\neg p \vee \neg q$ （①，⑦，矛盾）

⑨（①，⑧，$\longrightarrow_+$）

乙①$\neg p \vee \neg q$ （（W））

②$p \wedge q$ （间（W））

⑧p （②$\wedge_-$）

④q　　（②∧-）

⑤¬q　　（③，①，去∨导出）

⑥¬p　　（④，①，去∨导出）

⑦¬（p∧q）　　（③与⑥，④与⑤矛盾）

⑧（①，⑦，$\longrightarrow_+$）

丙①（甲，乙，$\longleftrightarrow_+$）　　（证毕）

由T_{19}得¬∧导出规则十：

$$\frac{\neg(A\wedge B)}{\neg A\vee\neg B}\qquad\frac{\neg A\vee\neg B}{\neg(A\wedge B)}$$

T_{20}：$p\longleftrightarrow p\wedge p$

证明：

甲①p　　（（W））

②¬(p∧p)　　（间(W)）

③¬p∨¬p　　（②¬∨导出）

④¬p　　（①，③，去∨导出）

⑤p∧p　　（①，④，矛盾）

⑥（①，⑤，$\longrightarrow_+$）

乙①p∧p　　（（W））

②p　　（①∧-）

③（①，②，$\longrightarrow_+$）

丙①（甲，乙，$\longleftrightarrow_+$）　　（证毕）

由T_{20}得合取分析导出规则十一：

$$\frac{A}{A\wedge A}\qquad\frac{A\wedge A}{A}$$

T_{21}：$p\vee q\longleftrightarrow q\vee p$

证明：

甲①p∨q　　（（W））

②¬(q∨p)　　（间(W)）

③¬q∧¬p　　　　（②，¬∨导出）

④¬q　　　　（③∧₋）

⑤¬p　　　　（③∧₋）

⑥p　　　　（④，①，去∨导出）

⑦q　　　　（⑥，①，去∨导出）

⑧q∨p　　　　（⑤与⑥，④与⑦，矛盾）

⑨（①，⑧，$\longrightarrow_+$）

乙（证明方法同甲）

丙①（甲，乙，$\longleftrightarrow_+$）　　　　（证毕）

由T_{21}得析取交换导出规则十二：

$$\frac{A\vee B}{B\vee A}$$

T_{22}：$p\wedge q\longleftrightarrow q\wedge p$

证明：

甲①p∧q　　　　（（W））

②q　　　　（①∧₋）

③p　　　　（①∧₋）

④q∧p　　　　（②，③，$\wedge_+$）

⑤（①，④，$\longrightarrow_+$）

乙（证明方法同甲）

丙①（甲，乙，$\longleftrightarrow_+$）　　　　（证毕）

由T_{22}得合取交换导出规则十三：

$$\frac{A\wedge B}{B\wedge A}$$

T_{23}：$(p\vee q)\vee r\longleftrightarrow p\vee(q\vee r)$

证明：

甲①（p∨q）∨r　　　　（（W））

②¬（p∨(q∨r)）　　　　（间(W)）

③$\neg p \wedge \neg(q \vee r)$　　　　（②$\neg\vee$导出）

④$\neg p$　　　　（③$\wedge_-$）

⑤$\neg(q \vee r)$　　　　（③$\wedge_-$）

⑥$\neg q \wedge \neg r$　　　　（⑤$\neg\vee$导出）

⑦$\neg q$　　　　（⑥$\wedge_-$）

⑧$\neg r$　　　　（⑥$\wedge_-$）

⑨$p \vee q$　　　　（①，⑧，去$\vee$导出）

⑩q　　　　（④，⑨，去$\vee$导出）

⑪p　　　　（⑦，⑨，去$\vee$导出）

⑫$p \vee (q \vee r)$　　　　（④与⑪，⑦与⑩，矛盾）

⑬（①，⑫，$\longrightarrow_+$）

乙（证明方法同甲）

丙①（甲，乙，$\longleftrightarrow_+$）　　　　（证毕）

T_{24}：$(p \wedge q) \wedge r \longleftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

证明：

甲①$(p \wedge q) \wedge r$　　　　（(W)）

②r　　　　（①$\wedge_-$）

③$p \wedge q$　　　　（①$\wedge_-$）

④q　　　　（③$\wedge_-$）

⑤p　　　　（③$\wedge_-$）

⑥$q \wedge r$　　　　（②，④，$\wedge_+$）

⑦$p \wedge (q \wedge r)$　　　　（⑤，⑥，$\wedge_+$）

⑧（①，⑦，$\longrightarrow_+$）

乙（证明方法同甲）

丙①（甲，乙，$\longleftrightarrow_+$）　　　　（证毕）

由T_{23}，T_{24}得结合导出规则十四：

$$\frac{(A \vee B) \vee C}{A \vee (B \vee C)} \qquad \frac{(A \wedge B) \wedge C}{A \wedge (B \wedge C)}$$

T_{25}: $p \vee (q \wedge r) \longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

证明：

甲① $p \vee (q \wedge r)$ （(W)）

①$_1$ p （补(W)）

①$_2$ $p \vee q$ （①$_1$ $\vee_+$）

①$_3$ $p \vee r$ （①$_1$ $\vee_+$）

①$_4$ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ （①$_2$，①$_3$，$\wedge_+$）

①$_5$ $q \wedge r$ （补(W)）

①$_6$ q （①$_5$ $\wedge_-$）

①$_7$ r （①$_5$ $\wedge_-$）

①$_8$ $p \vee q$ （①$_6$ $\vee_+$）

①$_9$ $p \vee r$ （①$_7$ $\vee_+$）

①$_{10}$ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ （①$_8$，①$_9$，$\wedge_+$）

② $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ （①$_1$ $\longrightarrow$ ①$_4$，①$_5$ $\longrightarrow$ ①$_{10}$，①，$\vee_-$）

③（①，②，$\longrightarrow_+$）

乙① $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ （(W)）

② $\neg(p \vee (q \wedge r))$ （间(W)）

③ $\neg p \wedge \neg(q \wedge r)$ （② $\neg\vee$ 导出）

④ $\neg p$ （③ $\wedge_-$）

⑤ $\neg(q \wedge r)$ （③ $\wedge_-$）

⑥ $\neg q \vee \neg r$ （⑤ $\neg\wedge$ 导出）

⑦ $p \vee q$ （① $\wedge_-$）

⑧ $p \vee r$ （① $\wedge_-$）

⑨ q （④，⑦，去 $\vee$ 导出）

⑩ r （④，⑧，去 $\vee$ 导出）

⑪ $\neg r$ （⑥，⑨，去 $\vee$ 导出）

⑫ $\neg q$ （⑥，⑩，去 $\vee$ 导出）

⑬$p\vee(q\wedge r)$　　　　　　（⑨与⑫，⑩与⑪，矛盾）

⑭（①，⑬，$\longrightarrow_{+}$）

丙①（甲，乙，$\longleftrightarrow_{+}$）　　（证毕）

由T_{15}，T_{25}得分配导出规则十五：

$$\frac{A\vee(B\wedge C)}{(A\vee B)\wedge(A\vee C)}\qquad\frac{A\wedge(B\vee C)}{(A\wedge B)\vee(A\wedge C)}$$

我们知道，命题演算系统，无论是公理推理系统还是自然推理系统，其构造形式是多种多样的，但是其基本原理却在很大程度上相同。人们只要对其中的一种构造形式深入钻研下去，把握其基本原理，掌握其演算规律和技巧，那么再学习其他构造形式就比较容易了。

四　元逻辑问题

当我们把逻辑本身作为研究对象，考察其内在逻辑问题时，就构成了元逻辑。元逻辑主要研究三个问题：推理系统是否一致？推理系统是否完全？公理和推理规则相对于公理系统是否独立？这三个问题就是通常所谓的推理系统的一致性、完全性和独立性问题。

我们所介绍的命题演算系统都具有一致性、完全性和独立性。这里只就公理推理系统来进行讨论。公理推理系统要从一些公理和推理规则出发，不能推演出自相矛盾的结论来，也就是说，在推演过程中不能出现逻辑矛盾，这就是对此系统的一致性要求。这样的系统还应该把演绎推理中的所有真命题即定理完全都能推导出来，这就是对此系统的完全性要求。对于这个系统中的每条公理来说，它们彼此应该互相独立，不能由一个公理而推出另一个公理，这就是对此系统的独立性要求。

（一）一致性

一致性也称相容性、协调性、可靠性或无矛盾性。任何理论

系统，如果它本身存在着逻辑矛盾，那么这个系统就是不可靠的。命题演算的公理系统也是这样。一个系统的无矛盾性，是这个系统能够确立的首要条件。

推理系统的一致性有几种定义。这里介绍三种：1.对于一个推理系统而言，若该系统中所有的定理都是永真公式，那么它是语义一致的；2.若并非该系统的一切公式都是定理，那么它是语法一致的（语法是指符号的形式结构）；3.若对于该系统的任一公式A而言，A和¬A至少有一个不是该系统中的定理，则它是古典一致的。

1.一致性的语义定理：命题演算在语义上是一致的。这就是说，命题演算中的所有定理都是真的，都是重言式。对这个定理主要从两个方面来证明：（1）命题演算的公理都是重言式，即都是永真的；（2）应用命题演算的推理规则和定义，都能保障从重言式只能推出重言式。因为，假如A是公理集，B是定理集，那么，如果A集都是重言式，推理规则和定义又能保障从重言式推出重言式；我们就会得出由A集推出的B集必定都是重言式。如下就从两个方面来证明。

（1）公理总共有4条：

①$p \vee p \longrightarrow p$；

②$p \longrightarrow p \vee q$；

③$(p \vee q) \longrightarrow (q \vee p)$；

④$(q \longrightarrow r) \longrightarrow ((p \vee q) \longrightarrow (p \vee r))$。

不难用真值表法或反证赋值法证明这四个公理都是重言式（具体证明从略）。

（2）命题演算的推理规则主要有三条，即代入规则，分离规则和置换规则。我们可以分别证明应用这些规则，从重言式只能得到重言式。另外是关于定义，根据五个联结词的真值表定义，定义式和被定义式都是等值的（可用真值表证明），因此对重言

式作定义等值置换得到的仍然是重言式。下面主要讨论推理规则。

①代入规则　设Φ（A）为一重言式，其中A为一合式公式（包括命题变项p，q，r…）。由于Φ（A）是重言式，所以无论A取真值或假值，Φ（A）总是真的。再设B为一合式公式，以B代入后得到Φ（B），则Φ（B）仍是一重言式。因为Φ（Δ）是一真值函项，一个真值函项总体的真假取决于其中变项的真假，而与其中部分表达式无关。所以无论B如何复杂，其真值无外乎是真的或是假的。不管变项是真是假，或变项代之以复杂的B后是真是假，作为重言式Φ（A）即使变为Φ（B），它也是永真的。可见，代入规则从重言式只能得到重言式。

②分离规则　设A和A⟶B都是重言式。在⟶的真值表中，可以看到

A	B	A⟶B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

只有在第一行情况下，A和A⟶B同时为真。在这种情况下，B也是真的。所以，只要断定了A是重言式，同时断定了A⟶B也是重言式，那么B的值就一定是重言式。由此可证，应用分离规则，从重言式只能得到重言式。

③置换规则　这里不仅指定义置换，而且包括所有等值置换，即如果A⟷B，则从Φ（A）可得Φ（B）。由于定义或等值公式左右两边的真值相同，置换时是用真值相同的公式去代替，因此置换后不改变真值，置换后所得的公式与原公式的真值相同。如果原公式为重言式，置换后当然仍为重言式。可见，应

用置换规则从重言式只能得到重言式。

根据上面的一致性语义定理的证明，命题演算的定理都是重言式，不可能出现非重言式，不可能造成系统本身逻辑矛盾即不一致现象。

2.一致性的语法定理　命题演算是语法一致的。这就是说，并非任一公式都是命题演算的定理。系统中有的符号序列可称为合式公式，但决不是所有合式公式都可作为定理。证明是比较容易的，因为一切定理都是重言式，所以非重言式的公式，例如$A \vee B$，$A \wedge B$等，虽然也是公式，但却不是定理。并非该系统的一切公式都是定理，所以它是语法一致的。

3.一致性的古典定理　命题演算是在古典意义下一致的。这就是说，对任一公式A，A和$\neg A$不能都是命题演算的定理。下面我们来证明。对于命题演算的任一公式A来说，有时A和$\neg A$都不是重言式，例如$\neg p \vee q$与$\neg(\neg p \vee q)$。但是，A和$\neg A$却不能同时都是重言式，例如$p \vee \neg p$与$\neg(p \vee \neg p)$。如果A是重言式，是永真的，那么$\neg A$就是逻辑矛盾，是永假的。反过来，如果$\neg A$是重言式，如$\neg(p \wedge \neg p)$，那么A就是矛盾式，如$p \wedge \neg p$。由于A和$\neg A$不能都是重言式，而根据一致性语义定理，只有重言式才是定理，所以，A和$\neg A$不能都是定理。命题演算是古典意义下一致的。

（二）完全性

完全性（或完备性）问题是推理系统的另一个重要的元逻辑问题。不过相对于一致性而言，完全性就不是非有不可的。尽管有一些推理系统是完全的，但更多的推理系统是不完全的。推理系统的完全性定义也有多种，比如：1.对于一个推理系统而言，如果在该系统可推出属于某一特定范围内的一切真命题，那么这一系统就是语义完全的（又称广义完全的，或相对完全的）；2.如果把该系统中任何非定理的公式作为新公理引进该系统，

就会导致逻辑矛盾而使该系统不一致，那么这一系统是语法完全的（又称狭义完全的，或绝对完全的）；3.如果某系统对于任一合式公式A而言，或者A是可证的，或者$\neg A$是可证的，那么这一系统就是古典完全的。

古典完全性是针对某些种类的公理系统而言的，在这种系统里，合式公式中没有自由变项（即没有不被量词约束的变项，这将在谓词逻辑中讲到）。命题演算不是这种公理系统，因此它不是古典完全的。比如，公式$\neg P \vee q$及其否定$\neg(\neg p \vee q)$，虽然都是合式公式，都可以表示为A及其否定$\neg A$，但是它们都不是重言式，因此在命题演算中都不可证。我们只讲命题演算的语义完全性和语法完全性。

1. 完全性的语义定理　一切重言式在命题演算里都是可证的。证明：

（1）设A为一重言式（永真公式）。

（2）作A的合取范式，设为B，其表达式为：$B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n$。其中每一$B_i$（$1 \leqslant i \leqslant n$）都是简单析取式。

（3）B是永真的重言式，因为$A \longleftrightarrow B$。

（4）所以B_i是永真的，因为它们是永真的合取范式B的支命题。

（5）因为B_i是析取式，所以其中至少包含一对互相否定的析取项，例如$p \vee \neg p$，$p \vee q \vee \neg q$等。

（6）已知$p \vee \neg p$是可证的（据公理推理系统T_4。以下均讲前述公理推理系统）。

（7）所以，$p \vee q \vee \neg q$也是可证的（据R_1，T_{10}）。

（8）所以，B_i是可证的（据(6)，(7)）。

（9）据T_{21}：$p \longrightarrow (q \longrightarrow p \wedge q)$，所以$B_i \longrightarrow (B_j \longrightarrow B_i \wedge B_j)$也可证。

（10）据（8）和（9）及R_2，得$B_j \longrightarrow B_i \wedge B_j$。

（11）同样，B_j也是可证的（都是析取项）。

（12）据R_2，得$B_i \wedge B_j$。

（13）所以，$B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n$是可证的（只要将如上证明反复多次就可知）。

（14）所以，B是可证的。

B是A的合取范式，是从A根据置换规则得到的，所以由B可证得知A也可证。当然，正如上面的证明所表现的，B的证明就是在需要证明A的公理系统中进行的，这个系统既然能证明B，当然就能证明A。由上所证可知，凡重言式皆可证，故命题演算系统是语义完全的。从完全性定理的证明过程可以看出，它提供了一个有效的证明方法。如果求证一给定的公式A，可先求其合取范式B，如果B不是永真的，则B就不是定理，因而A也不是定理，所以A不可证。如果B是重言式，则B是定理，因而A也是定理，A是可证的。所以在命题演算中我们把求一个公式的合取范式，作为证明这一公式是否可证，是否为定理的方法，而这种方法又是很便利的。

2.完全性的语法定理　命题演算是语法完全的，如果把一不可证的公式作为公理，其结果将造成系统的不一致。这个定理说明，由公理A_1至A_4可以推出一系列命题公式作为定理，而且这四个公理足够用了。如果有一个公式B，它不能由公理A_1至A_4推出，而又要强硬地把它放进公理系统中去，则其结果就会造成系统的不一致。下面进行证明。

（1）设公式B不能由公理A_1至A_4推出，即B在公理系统中是不可证的。

（2）B不是永真的重言式（从完全性的语义定理可知，凡是永真的重言式都是可证的，即都能由公理A_1至A_4推出的，因此，凡不能由公理A_1至A_4推出的公式、即凡不可证的公式都不是永真的重言式）。

（3）作B的合取范式C：$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n$。每个$C_i$（$1 \leqslant i \leqslant n$）都是析取式。

（4）C也不是永真的重言式，因为$B \longleftrightarrow C$。

（5）具体说，C中至少有一个合取项C_i不是永真的重言式，即C_i中有的是不包含一对互相否定的析取项，如（$p \vee q \vee r$），即使这种析取项中的命题变项也有肯定，也有否定，但是这种命题变项并不相同，如（$p \vee q \vee \neg r \vee s$）。

（6）如果把B加到公理A_1至A_4中去作为公理，那就等于首先断定了B，即B可证。

（7）因此也就等于断定了C，即C可证，因为C是B的范式。

（8）这样，C_i可证。

（9）如果以p代C_i中的肯定命题变项，以$\neg p$代C_i中的否定命题变项，例如（$p \vee \neg q \vee \neg r \vee s$）就可得到（$p \vee \neg\neg p \vee \neg\neg p \vee p$）。我们对其销去双重否定就可得到（$p \vee p \vee p \vee p$）。

（10）所以，如果C_i可证，那么（$p \vee p \vee p \vee p$）就可证。

（11）根据A_1：$p \vee p \longrightarrow p$，那么（10）可得p，即p可证，p为一定理。

（12）我们以D代入p，则D可证，D为一定理。

（13）我们又以$\neg D$代入p，则$\neg D$可证，$\neg D$为一定理。

（14）不难看出，D和$\neg D$都是可证的，都是定理，这就出现了逻辑矛盾，造成了系统的不一致。所以，如果将一个不可证的公式B作为公理，则将导致系统的逻辑矛盾和不一致性。命题演算的公理系统在语形上是完全的。

（三）独立性

命题演算系统的独立性问题，可以说就是公理的独立性问题。公理独立性有两方面的含义，一方面是说命题演算的公理彼此是否是独立的，是否有某一公理可以从其他公理中推演出来。另一方面是说，是否有多余的公理可以省略。从这两方面的含义

看，独立性就是不可推演性。如果我们根据已给定的推理规则，从一类公式推演不出某一特定公式，那么这一特定公式对于这类公式就是独立的。但是，事实上应用某些推演规则所不能推出的，应用另一些推演规则却可能推演出来。所以，独立性总是相对于已给定的推理规则而言的。公理独立性的定义：一个公理集合M是独立的，如果M中的任一公理A都不能根据给定的推理规则从M中其他公理推演出来。

我们要求公理是独立的，就是说，作为推理出发点的公理最好缺一不可，这样建立的公理系统才是经济的。不过，这一要求不是必须的，即使一公理系统的诸多公理有不独立的，也不能算是很大的缺点。

为了证明公理系统的独立性，我们采用先给命题演算以某种算术解释的方法。它不仅对命题变项要加以语义解释，而且必要时对所有联结词即命题常项也要重新解释（即重新定义）。具体地说，假定有一公式集合M：｛A_1，A_2，A_3，A_4｝，以及两个推理规则R_1，R_2，如果对该公式集合的公式赋一语义解释，使得A_1，A_2和A_3都有值Φ（Φ是抽象的，是根据证明需要而人为构造的，它可以是任何值，比如可以是真或假，也可以是0，1，2之类的自然数，总之，根据证明需要而人为构造），并且R_1和R_2是保Φ的，而A_4却不具有值Φ，那么，我们就说，从A_1，A_2和A_3推不出A_4，亦即A_4是独立的。

这种方法成立的根据是：如果A_4可以从A_1，A_2和A_3推出，那么由于A_1，A_2，A_3有值Φ，并且R_1，R_2是保Φ的，所以A_4必有值Φ；但A_4却没有值Φ，所以A_4不能从A_1，A_2和A_3推出。这样，一公式独立的概念可定义为：公式A对于公式B是独立的，当且仅当有一个解释，使得B有值Φ而A没有值Φ。下面证明命题演算里各公理的独立性。

独立性定理一　A_1是独立的。

算术解释：给予命题演算的原始符号如下的解释，这些解释都是根据证明的不同需要而人为构造的。

（1）命题变项p，q，r，s，p_1，…等可有三个值：0，1，2。

（2）初始联结词¬和∨的数值解释列出数值表如下（数值表用法同真值表）：

A	¬A
0	1
1	0
2	2

A	B	A∨B
0	0	0
0	1	0
0	2	0
1	0	0
1	1	1
1	2	2
2	0	0
2	1	2
2	2	0

根据这种解释，可有以下结果：

（1）A_2，A_3，A_4的值常为0。数值表只以A_2为例，据D_2，A_2的p⟶(p∨q)可换成¬p∨(p∨q)。又据前两表，A_2的值如下：

p	q	¬p	p∨q	¬p∨(p∨q)
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	2	1	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	1	0
1	2	0	2	0
2	0	2	0	0
2	1	2	2	0
2	2	2	0	0

表中显示A_2的值常为0。据D_2，A_3可换为$\neg(p\vee q)\vee(q\vee p)$；$A_4$可换为$\neg(\neg q\vee r)\vee(\neg(p\vee q)\vee(p\vee r))$。列表可知$A_3$和$A_4$的值均常为0（数值表从略）。

(2)应用推理规则，从数值常为0的公式只能得到数值常为0的公式。因为，代入和置换规则只对命题变项进行，而A_2、A_3、A_4的数值表表明不论它们的命题变项取0，1，2三值中哪一值，整个公式的值常为0。所以对A_2，A_3，A_4施行代入或置换所得公式的值仍为0，即推理规则R是保0的。我们再具体分析一下分离规则。

A	B	¬ A	A⟶B（即¬A∨B）
0	0	1	0
0	1	1	1
0	2	1	2
1	0	0	0
1	1	0	0
1	2	0	0
2	0	2	0
2	1	2	2
2	2	2	0

从表上可以看出，当A和A⟶B的数值皆为0时，B的值也是0。所以，如A和A⟶B的值常为0，则B的值也常为0。应用分离规则，从公理A_2，A_3，A_4只能得到其值常为0的公式。此处的“数值常为0”就是独立性证明所需要的也是人为构造的性质Φ。因此，如果A_1不是独立的，那么它也应该推出数值常为0。但是A_1的数值并不是常为0。据D_2，A_1的$(p\vee p)\longrightarrow p$可换成$\neg(p\vee p)\vee P$，其数值表如下：

p	p∨P	¬(p∨p)	¬(p∨p)∨p
0	0	1	0
1	1	0	0
2	0	1	2

从表中看出A_1的值不常为0，所以A_1是独立的。

独立性定理二　A_2是独立的。

算术解释：

（1）命题变项有四个值：0，1，2，3。

（2）¬和∨的数值解释，用等式表示为：

①$\neg 0=1$，$\neg 1=0$，$\neg 2=3$，$\neg 3=2$。

②$0\vee 0=0\vee 1=0\vee 2=0\vee 3=0$，

$1\vee 1=1\vee 2=1\vee 3=1$，

$2\vee 2=2\vee 3=2$，

$3\vee 3=3$。

其中，∨也可用交换律。根据这种解释，A_1，A_3，A_4的值常为0或2。见如下数值表：（表见第139页）。这个表的排列并不是完全的，完全的要有32种。但可以概貌地看出A_1，A_3，A_4的值常为0或2。推理规则也传递“等于0或2”这种性质，但是A_2并不常“等于0或2”。当p取值2，q取值1时，A_1：$p\longrightarrow p\vee q$的值为$2\longrightarrow 2\vee 1=\neg 2\vee(2\vee 1)=3\vee 1=1$。所以，$A_2$是独立的。

独立性定理三　A_3是独立的。

算术解释：

（1）命题变项有四个值：0，1，2，3。

（2）¬和∨的数值解释，用等式表示为：

①$\neg 0=1$，$\neg 1=0$，$\neg 2=0$，$\neg 3=2$。

②$0\vee 0=0\vee 1=1\vee 0=0\vee 2=2\vee 0=0\vee 3=3\vee 0=0$，

p q r	A_1转换为 $\neg(p\vee p)\vee p$	A_3转换为 $\neg(p\vee q)\vee(q\vee p)$	A_4转换为 $\neg(\neg q\vee r)\vee(\neg(p\vee q)\vee(p\vee r))$
0 0 3	$\neg 0\vee 0=0$	$=0$	$p=0$
0 1 2	$=0$	$=0$	$q=0$ ⎫ $\equiv 0$
0 2 1			$r=0$
0 3 0	⋮	⋮	
1 0 3			$p=1$
1 1 2			$q=1$ ⎫ $\equiv 0$
1 2 1			$r=1$
1 3 0	$\neg(1\vee 1)\vee 1=0$	$=0$	
2 0 3	$\neg(2\vee 2)\vee 2=2$	$\neg(2\vee 0)\vee(0\vee 2)=2$	$p=2,3$
2 1 2	⋮	$\neg(2\vee 1)\vee(1\vee 2)=2$	$q=2,3$
2 2 1			$r=2,3$
2 3 0	$=2$	⋮	
3 0 3	$\neg(3\vee 3)\vee 3=2$		
3 1 2	⋮		$\equiv 2$
3 2 1			$\equiv 2$
3 3 0	$=2$	$\neg(3\vee 3)\vee(3\vee 3)=2$	

$$1\vee 1=1,\ 1\vee 2=2\vee 1=2,\ 1\vee 3=3\vee 1=3,$$
$$2\vee 3=0,\ 3\vee 2=3,\ 2\vee 2=2,\ 3\vee 3=3。$$

根据这个解释，A_1，A_2，A_4的值常为0，推理规则确保或传递“常为0”的性质。但是，A_3的情况却相反，当p取2，q取3时，有

$$\neg(p\vee q)\vee(q\vee p)=\neg 0\vee 3=1\vee 3=3,$$

就是说，A_3的值不常为0。所以，A_3是独立的。

独立性定理四　A_4是独立的。

算术解释：

（1）命题变项有四个值：0，1，2，3。

（2）$\neg$和$\vee$的数值解释，用等式表示为：

①$\neg 0=1$，$\neg 1=0$，$\neg 2=3$，$\neg 3=0$。

②$0\vee 0=0\vee 1=1\vee 0=0\vee 2=2\vee 0=0\vee 3=3\vee 0=0$，

$1\vee 1=1$，$1\vee 2=2\vee 1=2$，$1\vee 3=3\vee 1=3$，

$2\vee 2=2$，$2\vee 3=3\vee 2=0$，$3\vee 3=3$。

根据这个解释，A_1，A_2，A_3的值常为0，由它们推演出来的公式的值也常为0。但是，A_4的情况却相反，当p取值2，q取值2，r取值2时，有

$$
\begin{aligned}
&\neg(\neg q\vee r)\vee(\neg(p\vee q)\vee(p\vee r))\\
=&\neg(0\vee 2)\vee(\neg 0\vee 2)\\
=&\neg 0\vee 2\\
=&1\vee 2\\
=&2,
\end{aligned}
$$

就是说，A_4的值不常为0。所以，A_4是独立的。

五　命题演算的其它系统

当人们学习现代逻辑或数理逻辑的时候，会遇到各种各样的形式系统，它们常常是，不仅演算形式不同，而且语言表述和符号使用也不相同。这给学习者带来许多困难。其实这些系统在基本原理上或本质上都是相同的或相近的；我们只有在差异中找到同一，理解才会深刻。我们以联结词为例。尽管逻辑界所使用的符号不完全一样，但是基本联结词的名称和语义主要是五个：否定（并非），析取（或者），合取（并且），蕴涵（如果，那么），等值（当且仅当）。我们择要列表如下：（表见第141页）。

必须看到，无论使用怎样的符号表示，在对重言式构造逻辑演算的形式系统时，基本上分为两大类形式：公理推理系统和自然推理系统。我们在前面分别介绍了这两类形式的一种表现。下面再介绍几种。

关于公理推理系统

联结词	符号表示（命题变项用p,q等）	
	普通表示	前置表示
否定（并非）	$\overline{P}$, ~p, ¬p, ¬p,	Np
析取（或者）	p∨q	Apq
合取（并且）	p·q, p&q, p∧q	Kpq
蕴涵（如果，那么）	p⊃q, p⟶q,	Cpq
等值（当且仅当）	p≡q, p~q, p⟷q	Epq

（一）*弗雷格系统* 命题逻辑的公理化，最早可以追溯到十九世纪末德国数理逻辑学家弗雷格所写的《概念语言》。弗雷格用的初始联结词是否定和蕴涵，有六条公理和两个推理规则。他所使用的符号比较难懂，用一条垂直短线加上一条水平短线，表示右侧的符号序列（命题）是被断定了的：

⊢┬ A

其中，最左方的垂直短线“|”称为判断短线，水平短线“——”称为内容短线，整个符号“⊢┬”称为断定符号。另外，表示真值蕴涵的符号是：

$$\vdash\!\!\top^{A}_{B}$$

它相当于人们熟悉的表示⊢B⟶A，它里面连结两条水平短线的垂直线称为条件短线。表示否定的断定是：

⊢┬A

它相当于人们熟悉的表示$\vdash \neg A$，它那断定符号下面的垂直短线称为否定短线。将内容短线，否定短线、条件短线作各种组合，就能表达各种联结词。如：

$\vdash B \rightarrow \neg A$就是 [Frege notation diagram: A, B]。

$\vdash \neg(B \rightarrow \neg A)$即 $\vdash B \wedge A$是 [Frege notation diagram: A, B]。

$\vdash \neg B \rightarrow A$即 $\vdash B \vee A$是 [Frege notation diagram: A, B]。

等等。现在看来这种表示是十分费事的，但在一百多年前首次设计这种符号语言，那是件很辉煌的事情。

六条公理用现代符号表示是：

1. $p \longrightarrow (q \longrightarrow p)$
2. $(p \longrightarrow (q \longrightarrow r)) \longrightarrow ((p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow r))$
3. $(p \longrightarrow (q \longrightarrow r)) \longrightarrow (q \longrightarrow (p \longrightarrow r))$
4. $(p \longrightarrow q) \longrightarrow (\neg q \longrightarrow \neg p)$
5. $\neg\neg p \longrightarrow p$
6. $p \longrightarrow \neg\neg p$

两条推理规则是：

1.分离规则　从 [Frege notation diagram: A, B] 和 $\vdash B$，可得到新命题$\vdash B$。

2. 代入规则　这是从一般到特殊的推理规则，即如果$\vdash A$，那么$\vdash A(x/B)$，其中x是命题变项，B为任一合式公式。

弗雷格是数理逻辑两个演算的创始人之一，但他所用的符号

体系很不方便，他的系统也不是一个完全严格的公理系统。六条公理中的3，5，6都可由1，2，4推出，因此对弗雷格的公理组可以简化，取1，2，4条即可。现在还经常见到的命题演算系统L，实际上就是弗雷格系统的简化和改进。在系统L中，用的是公理模式，所以就取消了代人规则。形式系统L：

1．初始符号（无限）

p_1，p_2，p_3，…

$\neg$，$\longrightarrow$，（，）

2．形成规则

①p_i是一合式公式，其中$i\geq1$。

②如果A，B是合式公式，那么$\neg A$，$A\longrightarrow B$是合式公式。

③只有适合以上两条规则，才是合式公式。

3．初始公式（即三个公理模式）

①$A\longrightarrow(B\longrightarrow A)$

②$(A\longrightarrow(B\longrightarrow C))\longrightarrow((A\longrightarrow B)\longrightarrow(A\longrightarrow C))$

③$(\neg A\longrightarrow\neg B)\longrightarrow(B\longrightarrow A)$

这里每一个公理模式都有无限多个“实例”，A，B，C的取值范围是L中的所有合式公式。

4．推理规则（即变形规则）

在L中只有一个推理规则，称为分离规则（记作MP），即从$\vdash A$和$\vdash A\longrightarrow B$，可得$\vdash B$。

5．定义（即引入三个联结词，它们采用重言等值式）：

①$(A\vee B)\longleftrightarrow(\neg A\longrightarrow B)$

②$(A\wedge B)\longleftrightarrow\neg(A\longrightarrow\neg B)$

③$(A\longleftrightarrow B)\longleftrightarrow(A\longrightarrow B)\wedge(B\longrightarrow A)$

（二）罗素系统　1910年英国学者罗素和怀特海合作完成三卷本《数学原理》，其中包括命题演算的PM系统，人们也称之

为罗素系统。我们在本书中介绍的命题演算系统，主要是对PM系统的充实和改进。PM系统的初始符号、形成规则、定义、公理、推理规则和定理证明，均与本书前述命题演算的公理推理系统基本相同，在此不再重复。我们只是补充说明，可以证明PM系统和L系统的定理相同，也可以说L是PM的扩充，PM是L的扩充。在L系统中证明的几十条定理在PM系统中也是定理。由于它们定理相同，而L系统的定理都是重言式，重言式都是L系统的定理，因此我们也可得出结论：PM系统的定理都是重言式，重言式都是PM系统的定理，就是说PM系统既是一致的又是完全的。

当然罗素PM系统也存在一些缺陷：由于没有明确区别对象语言和语法语言(元语言)，因此没有给出全部的语法规则；没有把分离规则作为语法规则提出来。演算中虽然应用了代入规则，但是，他认为代入规则不能建立起一般的规则，因为所需的应用是特殊的，而没有一般规则能够明显地包括特殊的应用。还有，该系统的第五公理（结合律）是不独立的，可以从其他的公理推导出来。

（三）前置表示系统　我们起这个名称，只是说这个系统的演算符号（联结词）都是采用前置式，比如$p \vee q$写成Apq。这是由波兰学者卢凯西维奇在20年代首创的。我们用这种前置表示方法，具体介绍以希尔伯特-贝奈斯为代表的命题演算系统。这个系统不从公理数量的多少着眼，而企图将那五个基本联结词的一些重要特征用公理表示出来。因此我们主要介绍其公理，而且通过这种介绍，使人们熟悉一下前置表示的特点。右侧公式是用普通符号表示的。

1. 蕴涵公理

（1）CpCqp　　$p \longrightarrow (q \longrightarrow p)$

（2）CCpCpqCpq　　$(p \longrightarrow (p \longrightarrow q)) \longrightarrow (p \longrightarrow q)$

（3）CCpqCCqrCpr　　$(p \longrightarrow q) \longrightarrow (\quad (q \longrightarrow r) \longrightarrow$

$(p\rightarrow r))$

2．合取公理

（1）CKpqp　　$(p\wedge q)\rightarrow p$

（2）CKpqq　　$(p\wedge q)\rightarrow q$

（3）CCpqCCprCpKqr　$(p\rightarrow q)\rightarrow((p\rightarrow r)\rightarrow$
$(p\rightarrow q\wedge r))$

3．析取公理

（1）CpApq　　$p\rightarrow(p\vee q)$

（2）CqApq　　$q\rightarrow(p\vee q)$

（3）CCprCCqrCApqr

$$(p\rightarrow r)\rightarrow((q\rightarrow r)\rightarrow(p\vee q\rightarrow r))$$

4．等值公理

（1）CEpqCpq　　$(p\leftrightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow q)$

（2）CEpqCqp　　$(p\leftrightarrow q)\rightarrow(q\rightarrow p)$

（3）CCpqCCqpEpq

$$(p\rightarrow q)\rightarrow((q\rightarrow p)\rightarrow(p\leftrightarrow q))$$

5．否定公理

（1）CCpqCNqNp　　$(p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

（2）CpNNp　　$p\rightarrow\neg\neg p$

（3）CNNpp　　$\neg\neg p\rightarrow p$

以上每组公理说明了一个联结词的特征。由于五个联结词都在公理中出现，就不用再引入什么联结词定义了。推演规则只有分离和代入规则。

关于自然推理系统（编号与公理推理系统接排）。

（四）FPC系统　我们知道，自然推理系统的出发点除了由定义给出的公式的形成规则外，只是一些用模式给出的变形和推演规则。我们在下面将FPC系统的规则及其理解写在一起，便于学习。

1．结构规则

（1）Hyp（假设引入规则）。可按需要随时引入一个假设，由此所得的公式都是在这个假设下得出的。

（2）Rep（重复规则）。在一个假设下出现的公式（包括假设）可允许重复出现。

（3）Reit（重述规则）。在一个假设下出现的公式（包括假设）可在随后的假设下重复出现。

2．联结词规则

（1）$\longrightarrow$I（$\longrightarrow$引入）。从随后的假设下由A到B可推出A$\longrightarrow$B。或者说，在再作假设A下，如能推得B，那么在前一假设下就能得出A$\longrightarrow$B。也就是说如果由命题A真而断定命题B为真，那么就能断定命题A$\longrightarrow$B为真。

（2）$\longrightarrow$E（$\longrightarrow$消去）。从A和A$\longrightarrow$B可推出B，也即由命题A和A$\longrightarrow$B之为真能推出B为真。这是演绎推理中假言推理的反映。

（3）$\wedge$I（$\wedge$引入）。从A和B可推出A$\wedge$B。这是演绎推理中联言推理的反映。

（4）$\wedge$E（$\wedge$消去）。从A$\wedge$B可推出A；从A$\wedge$B可推出B。这也是演绎推理中联言推理的反映。

（5）$\vee$I（$\vee$引入）。从A可推出A$\vee$B；从B可推出A$\vee$B。即由命题A（或B）真，可得命题A$\vee$B真。这反映了相容析取$\vee$（相容或）的特性。

（6）$\vee$E（$\vee$消去）。从$A_1 \vee A_2$，$A_1 \longrightarrow B$和$A_2 \longrightarrow B$可推出B。这是演绎推理中二难推理的反映。

（7）$\longleftrightarrow$I（$\longleftrightarrow$引入）。从A$\longrightarrow$B和B$\longrightarrow$A可推出A$\longleftrightarrow$B。也就是反映了既充分又必要的条件是充分必要条件。

（8）$\longleftrightarrow$E（$\longleftrightarrow$消去）。从A$\longleftrightarrow$B和A可推出B，或者可推出A$\longrightarrow$B；从A$\longleftrightarrow$B和B可推出A，或者可推出B$\longrightarrow$A。

也就是说充分必要条件是既充分又必要的条件。

（9）$\neg$（非）。从随后的假设下由$\neg$A到$\neg$B及B可推出A。或者说，在再作假设$\neg$A下，如能得出B及$\neg$B，那么在前一假设下就能得出A。这实际上反映的是演绎推理中的反证法。如果作出原命题的否定的假设能推出矛盾的话，那么就能肯定原命题。

FPC系统的一个证明就是依上述规则构造起来的一系列公式。如果一个证明终止于某个假设下，则称该证明为假设性证明（即在每个假设下并未都用了$\neg$规则或$\longrightarrow$规则）。如果一个证明不是终止在某个假设下（必在每个假设下都用了$\neg$规则或$\longrightarrow$规则），则称该证明为非假设性证明。当公式A是某个非假设性证明的最后一步时，则称A是（形式）可证的公式，或称A是FPC的定理，并称该证明为A的一个（形式）证明。

一个证明中的每个假设下的一系列公式（包括假设）称为该证明的一个子证明。每个子证明都有一圈一竖标出（即ᑭ），圈的右边是该子证明的假设，竖线划到该子证明的最后一个公式的左边。表示整个非假设性证明的那个圈上为空（没有公式），标志无假设。每个子证明的标志ᑭ分别依次右移，作出几个可能的假设时，这些假设下的子证明排在一列。

例1．证明$(p\longrightarrow q)\wedge p\longrightarrow q$

①	○	$(p\longrightarrow q)\wedge p$	(Hyp)
②	│	$p\longrightarrow q$	(①∧E)
③	│	p	(①∧E)
④	│	q	(②,③$\longrightarrow$E)
⑤		$(p\longrightarrow q)\wedge p\longrightarrow q$	(①,④$\longrightarrow$I)（证毕）

例2. 证明$p \longrightarrow \neg\neg p$

①	○ p	(Hyp)
②	○ $\neg\neg\neg p$	(Hyp)
③	○ $\neg\neg p$	(Hyp)
④	$\neg\neg\neg p$	(②Reit)
⑤	$\neg\neg p$	(③Rep)
⑥	$\neg p$	(④,⑤$\neg$)
⑦	p	(①Reit)
⑧	$\neg\neg p$	(⑥,⑦$\neg$)
⑨	$p \longrightarrow \neg\neg p$	(①,⑧$\longrightarrow$I)(证毕)

(五)ℙ和ℙ*系统

我们将ℙ读作“空心P”,将ℙ*读作“空心P花”。这两个系统都是命题演算的自然推理系统。它们的初始符号,形成规则等跟其他系统很相近(只不过它的联结词只包括$\neg$和$\longrightarrow$),在此不再介绍。这里只讲它们的推理规则。

ℙ系统的推理规则有五条:

1. 肯定前提律($\in$)

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \vdash A_i \ (i=1, 2, \cdots, n)$$

它反映演绎推理中这样的规律:当所有前提被肯定后,前提中的每个命题就被肯定了。因此,前提中的每一个命题都可以作为结论由整个前提推出。

2. 传递律(τ)

如果$\Gamma \vdash \Delta \vdash A$(即$\Gamma \vdash \Delta$, $\Delta \vdash A$),那么$\Gamma \vdash A$。

演绎推理的传递律(τ)表明,如果由一定的前提可以推出一些命题,由这些命题又可以推出某个命题,那么,由原来的前提可以推出这个命题。当Δ是空序列时,(τ)就是说,如果某一个命题是不要前提就能推出的(相当于$\Phi \vdash A$),那么,由任何前提都能推出它(相当于任何Γ, $\Gamma \vdash A$)。这是(τ)的特殊情况。

3. 反证律（$\neg$）

如果$\Gamma, \neg A \vdash B, \neg B$（即$\Gamma, \neg A \vdash B$,

$\Gamma, \neg A \vdash \neg B$），

那么$\Gamma \vdash A$。

演绎推理的反证律（$\neg$）表明，如果在一定的前提下，再假设A不成立（即“非A”是真的，相当于$\neg A$），就能推出互相矛盾的命题（相当于$\Gamma, \neg A \vdash B, \neg B$），那么，由原来的前提就能推出A成立（相当于$\Gamma \vdash A$）。

4. 蕴涵消去律（$\longrightarrow_-$）

$A \longrightarrow B, A \vdash B$。

它反映演绎推理中这样的规律，即由“如果A则B，现A”，可以推出“B”。

5. 蕴涵引入律（$\longrightarrow_+$）

如果$\Gamma, A \vdash B$，则$\Gamma \vdash A \longrightarrow B$。

它反映演绎推理中这样的规律：如果在一定的条件下，再假设A是真的就能推出B（相当于$\Gamma, A \vdash B$），那么，由原来的前提能推出“如果A则B”（相当于$\Gamma \vdash A \longrightarrow B$）。

$\mathbb{P}^*$系统的联结词包括：$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$。它比前述$\mathbb{P}$系统的联结词（$\neg$, $\longrightarrow$）要多三个。它的推理规则跟$\mathbb{P}$系统部分相同，但又增加六条：

1. 肯定前件律（$\in$）。
2. 传递律（τ）。
3. 反证律（$\neg$）。
4. 蕴涵消去律（$\longrightarrow_-$）。
5. 蕴涵引入律（$\longrightarrow_+$）。

以上五条推理规律与$\mathbb{P}$中相应的推理规则有相同的形式、名称和符号。但是由于$\mathbb{P}^*$系统比$\mathbb{P}$包括更多的联结词和合式公式，所以这些推理规则各自比在$\mathbb{P}$中包括更多的内容。现在仅以

（$\longrightarrow_{-}$）为例来说明，看看其间的区别：

在P和P*中都有这样的形式：

$A\longrightarrow B$，$A\vdash B$。

这种形式在P中可以有：$p\longrightarrow(q\longrightarrow r)$，$p\vdash(q\longrightarrow r)$。但是在P*中不仅有这一情况，而且还有如下的情况：$p\longrightarrow(q\vee r)$，$p\vdash(q\vee r)$；$p\longrightarrow(q\wedge r)$，$p\vdash(q\wedge r)$，等等。

6．合取消去律（$\wedge_{-}$）。

$A\wedge B\vdash A$；$A\wedge B\vdash B$。

7．合取引入律（$\wedge_{+}$）。

A，$B\vdash A\wedge B$。

8．析取消去律（$\vee_{-}$）。

如果$A\vdash C$，$B\vdash C$，则$A\vee B\vdash C$。

9．析取引入律（$\vee_{+}$）。

$A\vdash A\vee B$；　$A\vdash B\vee A$。

10．等值消去律（$\longleftrightarrow_{-}$）。

$A\longleftrightarrow B$，$A\vdash B$；$A\longleftrightarrow B$，$B\vdash A$。

11．等值引入律（$\longleftrightarrow_{+}$）

如果Γ，$A\vdash B$，Γ，$B\vdash A$，

那么$\Gamma\vdash A\longleftrightarrow B$。

由以上介绍可以看出，P系统中只包有¬、$\longrightarrow$两个联结词，而P*系统中却包含有¬，$\vee$，$\wedge$，$\longrightarrow$，$\longleftrightarrow$五个联结词，因此P是P*的子系统。就是说，P的符号和形成规则在P*中都是有的，所以凡是P系统中的合式公式都包含在P*的合式公式之中；P的形式推理规则在P*中也都是有的，P的形式推理关于都包含在P*的形式推理关系之中。另一方面，虽然P中没有$\vee$，$\wedge$，$\longleftrightarrow$这三个联结词，但是我们可以在P中引进关于$\vee$，$\wedge$，$\longleftrightarrow$的定义，使得P*中的合式公式都成为P中的某种合式公式的另一种写法，并且能由此证明P*中的所有形式推理规则在P中都是有

的。P^*中的所有形式推理关系，在P中也都是有的。所以，也可以说，P^*也包含在P中，P^*也可是P的子系统。

第三章　谓词逻辑

谓词逻辑也称量词逻辑，它是现代逻辑的基本组成部分。它是把简单命题（即原子命题或基本命题）剖析为主词（即个体或客体）、谓词和量词，来研究命题内里的形式结构、推理规则的逻辑演算理论。在我们前面所谓的命题逻辑中，简单命题是不可分割的最小单位，因而对于必须区分开主词、谓词和量词的推理形式，它就不能进行研究。这方面恰恰是谓词逻辑要研究的内容。谓词逻辑有狭义与广义之分。其主要区别是：狭义谓词逻辑中量词只用于个体变项，而广义谓词逻辑中量词不仅用于个体变项，而且也用于命题变项和谓词变项。人们通常所见到的谓词逻辑，主要是狭义谓词逻辑。

第一节　谓词逻辑的基础理论

在基础理论部分，谓词逻辑将主要指出命题逻辑的不足，将把在命题逻辑中被封闭为浑然整体的单个命题"打开"，看其内部的成分和结构，以及命题与命题联结起来进行推理的规律。

一　命题逻辑的不足

如果把每个命题当作不能再分解的整体，那么对于精确地表

示命题之间的逻辑关系，前面所讲的命题逻辑理论已经足够了。但是如果顾及到命题的实际内容，单靠命题逻辑无论在用符号的表达上还是在命题间的逻辑推理上，有时就显得无能为力。

我们在日常思维中有大量的有效推理，单靠命题逻辑方法是很难说明其有效性的。例如：

所有的剧作家都是文学家
曹禺是剧作家
———————————
所以，曹禺是文学家

这个推理显然是有效的三段论推理，但是如果从命题逻辑的角度看，这个推理的形式只能被分析为：

$$\frac{\begin{array}{c}p\\q\end{array}}{\text{所以,}r}$$

问题在于，这种形式在命题逻辑中不是一个有效的推理形式，即 $p\wedge q\longrightarrow r$ 不是一个重言式。这说明命题逻辑不能表达上述推理的形式，当然更不能证明它的有效性。还例如：

所有金属都是导电体
———————————
所以，有些导电体是金属

这是换位法直接推理的正确形式，但是如果只用命题逻辑方法进行分析，它的符号只能表示为：

$$\frac{p}{\text{所以,}q}$$

即 $p\longrightarrow q$，这由真值表可知它不是重言式，所以不是有效推理。可见命题逻辑也不能反映换位法直接推理。但是这些推理的正确性决定于命题当中各个词项之间的联系，以命题为基本组成单位的命题逻辑不能反映这些推理的正确性，因此要引进谓词逻辑。

谓词逻辑要对简单命题加以分析，分别其主词和谓词，分别其量词的全称和特称（即“存在”），分别其一般和个别，总结出它们的形式结构，然后研究这些形式结构的逻辑性质，以及形

式结构间的逻辑关系，从而导出相应的逻辑规律，这就构成了谓词逻辑的基本内容。传统形式逻辑中的假言推理、选言推理、联言推理、二难推理以及有些关系推理和三段论，一般都可以用命题逻辑方法处理。谓词逻辑包括命题逻辑，当然也能处理上述推理。但是谓词逻辑还要研究其他有关性质命题的推理，如换质法、换位法、换质位法等直接推理以及直言三段论和关系推理等。

我们可以说，古希腊逻辑大师亚里士多德早就开始研究谓词逻辑了。亚氏把三段论分为完善的和不完善的，他认为第一格的四个式是完善的三段论，因为它们所表现的事物的联系是显而易见的。至于第二、三格的各式则为不完善的三段论。在第一格中，尤以前两个式AAA和EAE特别重要，在整个亚氏三段论中起着公理的作用。这里可以看出亚氏三段论体系实际上已经是一个初级的演绎系统，已经显示了公理化的倾向。后来，斯多葛学派和中世纪逻辑学家，分别对谓词逻辑的研究作出过一些贡献，但是比起他们在命题逻辑方面的成就要相差较远。直到十九世纪末，弗雷格才第一个建立起初步自足的谓词逻辑公理系统即谓词演算。后来，罗素和怀特海又在《数学原理》中提出了一个完全的谓词演算系统。

二　个体词、谓词和量词

我们只要“打开”命题的内部结构，就会发现命题一般都有主词和谓词。大致地说，主词表达命题所断定的事物，它就是我们通常所说的个体词；谓词表达主词所具有的属性，这种属性既包括事物的性质又包括事物间的关系。下面的命题中有圆点的是主词，没有圆点的是谓词。

牛顿是科学家。

2是偶数。

2<3。

不能被2整除的数不是偶数。

长白山位于中国和朝鲜之间。

（一）关于个体词　个体是个极广泛的概念，它是指客观存在的个体，包括有形的自然实体（如牛顿、长白山）和无形的抽象客体（如1，2，3等自然数）。这些广泛的一个个事物统称为个体。表示个体的语词称作"个体词"。在日常语言中，个体词一般包括专有名词，人称代词、指示代词和名词词组，如"牛顿"、"长白山"等是专有名词，"我"、"这个"是人称代词和指示代词，"不能被2整除的数"是名词词组。

在逻辑中可以用符号代表个体词。其符号又可分为个体变项、个体常项和摹状词。个体变项表示不确定的个体，一般记为：

$$x, y, z, x_1, y_1, z_1, \cdots$$

个体常项代表专有名词，一般用小写拉丁字母：

$$a, b, c, d, \cdots$$

摹状词比较复杂，我们放在后面介绍。

由一些（有限多的或无穷多的）个体所组成的集称为一个个体域。其中每个个体的性质没有限制，可以是各种各样的。

（二）关于谓词　谓词是表示一个个体的性质和两个或两个以上个体间关系的词。表示一个个体性质的词称为一元谓词，用带有一个空位的函词符号表示。例如有一个空位的函词符号F(　)表示一元谓词。表示n个（$n \geq 2$）个体关系的词称为n元谓词，用带有n个空位的函词符号表示。例如有两个空位的函词符号H（，）表示二元谓词。如果在空位处填入个体，则所得的式子称为该谓词的填式。如果在各空位处填以不同的个体变项，所得的填式称为该谓词的命名式。例如，在"3是一个奇数"中的"…是一个奇数"是一元谓词，若用F（　　）来表示这个谓词，则F（3）是该谓词的填式，表示"3是一个奇数"。F（x）是该

谓词的命名式，表示“x是一个奇数”。又如，在“天津的市容和上海的很相似”中，“…和…相似”就是二元谓词，若用H（，）表示这个谓词，则H（天津的市容，上海的市容）就是该谓词的填式，表示“天津的市容和上海的很相似”。H(x,y）是该谓词的命名式，表示“x和y相似”。

代表谓词的符号是谓词变元（也简称谓词或谓词符号），一般用大写拉丁字母表示：

$$F, G, H, R, F_1, \cdots$$

于是，比如一元谓词可表示为F（x），二元谓词可表示为F(x，y）或xFy，三元谓词可表示为F（x，y，z），n元谓词可表示为F（x，y，z，x_1，…，n）。

（三）关于量词　量词就是表示数量的词。量词分为两种：一种是全称量词，如“每一个”、“所有”、“凡”等，它们指称某个体域中的任何个体或一定范围内的所有个体；另一种是存在量词，如“有些”、“有”，它们指称某个体域中的部分个体。含有全称量词的命题是全称命题，含有存在量词的命题是存在命题。这在传统形式逻辑中讲过，但一般的都没有完全展开。

1．全称量词　我们先看几个例子：

一切生物都是进化的；

任何金属都是导电体；

所有商品都是劳动生产品；

凡能被2整除的数都是偶数；

太阳系的每一个行星都是围绕太阳运行的。

上面五个命题虽然内容各不相同，语言形式也不完全一样，但是仅就思维形式方面来看，它们仍有共同之处。它们都用“所有…都是…”（或说“所有S都是P”）这样的形式来反映事物的情况。我们说，任何命题形式总是由逻辑常项和逻辑变项所组成。在上述命题形式中，“所有”和“是”都是逻辑常项。“所有”

叫作全称量项，它的含义就是“任何”、“一切”、“凡”、“每一个”、“所有”等语词的共同的含义。“是”叫作肯定系词。“…”（或“S”和“P”）都是变项，它们的变域都是普遍概念，而不是单独概念。因此，我们可以称之为普遍概念变项，简称为概念变项。具体命题中紧跟着“所有”的那个普遍概念，叫作该命题的主项；紧跟着“是”的那个普遍概念，叫作该命题的谓项。

在日常语言中，全称量词的表达方式是多种多样的，比如：

心理过程为任何高等动物所具有。（任何）

凡是商品都是为交换而生产的。（凡是）

一周有七天。(一)

个个正方形都是四边相等的。(个个)

家家户户门口都挂着国旗。（家家户户）

一切的一切都是新的。（一切的一切）

是门都打开了。（是）

在现代逻辑中，对全称命题形式比如“所有S都是P”进行了完全符号化处理。比如命题“所有商品都是劳动生产品”，其中“所有”是全称量词。这个命题等于说：“对于一切事物而言，如果它是商品，那么它就是劳动生产品。”人们一般用 $\forall_x$ 或者（x）形式表示全称量词，其意思相当于“对于一切事物而言”。上面的命题就可记作：(x)(x是商品⟶x是劳动生产品）。

2.存在量词　我们如果对全称命题进行否定，那会出现怎样情况呢？比如，“并非任何金属是固体”的意思就是“有金属不是固体”；“并非凡金属都不是固体”的意思就是“有金属是固体”。由此可见：“并非所有S是P”等值于“有S不是P”；而“并非所有S不是P”等值于“有S是P”。在这里，与“并非所有”相当的“有”是什么含义呢？它的含义只能是“至少有一个”。“有”（或者“有的”）就称作特称量词或特称量项，或

存在量词，它是一种逻辑常项。人们一般用“有S是P”表示存在肯定命题，用“有S不是P”表示存在否定命题。全称和存在的区别就是命题的量的区别。

对于存在量词，我们必须理解其“至少有一个”或“至少存在着一个”的要点。比如在日常生活中可能有这样的对话。某甲：“你们厂有没有工程师是工人出身的？”某乙回答：“有。”我们必须理解，这个“有”字就表达了“我们厂有工程师是工人出身的”这个命题。从甲、乙两人的对话来看，某厂工程师中只要有一个人是工人出身的，乙的回答就是真的。某厂工程师中有些是工人出身的，而有些又不是，乙的回答依然是真的。某厂工程师全都是工人出身的，乙的回答也还是真的。“有”所反映的数量是不确定的，少到只有一个，多到全体，都可适应。但“有”也有很确定的一面，即反映了的确至少存在着一个，或者说不是没有。“有S是P”反映了至少存在着一个东西，它既是S又是P。“有S不是P”反映了至少有一个东西，它是S而不是P。“有”的含义是“至少有一个”，或“至少存在着一个”。因此，存在命题反映了存在着某事物情况。由于这个原因，特称命题也称作存在命题，特称量词也称作存在量词。

在现代逻辑中，对特称命题形式比如“有S是P”进行了完全符号化处理。比如命题“有的天体是不发光的”，其中“有的”是特称量词。这个命题等于说：“至少存在一个事物，它是天体并且是发光的。”人们一般用$\exists x$形式表示特称量词，其意思相当于“至少存在一个事物”。上面的命题就可记作：$(\exists x)$（x是天体∧x是发光的）。

（四）A、E、I、O的形式化　由于引入了个体词、谓词和量词，传统形式逻辑的性质命题A、E、I、O在谓词逻辑里就可以进行形式化。

1．全称肯定命题A　传统形式逻辑表示为：

SAP：所有S都是P。

它等于说：对于所有x而言，如果x是S，那么x 是 P。用符号 表示为：

$$(x)(S_{(x)} \longrightarrow P_{(x)})$$

这里还需要具体说明。例如命题“凡事物都是 发 展 的”。如果用x表示其中的个体词，用F 表示其中的谓词，那么此命题就可表示为：

$$(x)F_{(x)}$$

它读作：“对于所有x而言，x都是发展的。”这和原命题的意义相一致，所以这种翻译是允许的。但是换个命题，例如“凡自然数都大于零”，其翻译就比较复杂，它不能写成（x）（x大于零），因为这是说“对于所有x而言，x大于零”。而x是个体变项，它泛指一切个体事物，那么上面的意思就成了一切个体事物（如桌子、椅子等）都大于零了，这是很难讲通的，这和原命题意思不符。所以原命题应该译成一个蕴涵式：

（x）（x是自然数⟶x大于零）

它读作：“对于所有x而言，如果x是自然 数 则 x大于 零。”这和原命题的意思相符。我们如果用F和G分别表示“是 自 然数”和“大于零”，那么原命题的完全符号化为：

$$(x)(F_{(x)} \longrightarrow G_{(x)})$$

这也是全称肯定命题的最一般形式。

2．全称否定命题E　传统形式逻辑表示为：

SEP：所有S都不是P。

它等于说：对于所有x而言，如果x是S，那么x就不是P。用符号表示为：

$$(x)(S_{(x)} \longrightarrow \neg p_{(x)})$$

可以看出，全称肯定和全称否定命题都是用全称量词和蕴涵来表示的，这种表达式在现代逻辑中叫作形式蕴涵。形式蕴涵对 于S

的存在问题无所表示，它既没断定有S，也没断定无S，它只是说：对于所有x而言，如果x是S，那么x是（或不是）P。因为，有些全称命题的主词所表示的事物是不存在的。例如：一切不受外力影响的运动着的物体都保持直线匀速运动。这个命题的主词"不受外力影响的运动着的物体"，这种物体是不存在的，它只是一种理论上的假设，因此只能用形式蕴涵给以表现：对于所有事物而言，如果它是不受外力影响的运动着的物体，那么它就要保持直线匀速运动。

当然，也有全称命题的主词所表示的事物是存在的，例如：凡生命体都能新陈代谢。这个命题不只说明"对于所有x而言，如果x是生命体，那么它就能新陈代谢"，而且说明或者预设着确实有生命体存在。不能认为这类命题的形式只是一个形式蕴涵，它实际上包含两个部分，一部分是形式蕴涵，另一部分是一个断定主词所表示的事物存在的公式。我们用符号表示为：

$$(\exists x)S_{(x)} \wedge_{(x)} (S_{(x)} \longrightarrow P_{(x)})$$

对于其主词事实上存在的全称否定命题，它的符号形式也是断定主词存在的公式加上形式蕴涵。只不过，形式蕴涵是全称肯定和全称否定命题共同都有的基本形式。

3．特称肯定命题I　传统形式逻辑表示为：

SIP：有的S是P。

它等于说：存在着x，它既是S又是P。用符号表示为：

$$(\exists x)(S_{(x)} \wedge P_{(x)})$$

比如说："有的作家是工人。"它的正确翻译应当是：$(\exists x)(F_{(x)} \wedge G_{(x)})$。它读作："存在着x，x是作家并且x是工人。"显然这句话的意思跟原命题相符。但是如果把它翻译成形式蕴涵，那就要脱离了原命题的意思。因为在形式蕴涵$(\exists x)(F_{(x)} \longrightarrow G_{(x)})$当中，根据重言等值式$(p \rightarrow q) \longleftrightarrow (\neg p \vee q)$可得$((\exists x)(\neg F_{(x)} \vee G_{(x)}))$，它是说："存在着x，

或者x不是作家，或者x是工人。”这跟原命题的意思完全走样，前后不符。所以只能用合取式。

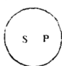
4．特称否定命题O　传统形式逻辑表示为：

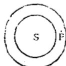
SOP：有的S不是P。

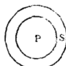
它等于说：存在着x，它是S但不是P。用符号表示为：

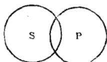
$(\exists x)(S_{(x)} \wedge \neg P_{(x)})$

对于特称命题为什么用合取式的问题，我们也可以通过欧拉图解的方法给予说明。在客观世界中，S类与P类之间的关系，可能有下面五种：　（一）　（二）　（三）











（四）　（五）

图　3—1

我们具体分析一下，在客观世界中S类与P类有哪种关系时，I和O是真的或假的。

SIP断定“有的S是P”，即断定了S类中有的分子x（表现为个体词）同时是P类的分子，即存在着x，它既属于S又属于P，那就只有图1，2，3，4的情况。但究竟S类中有多少分子同时也是P类的分子，SIP命题是没有明确断定的。因此，不论是多到S类的全部分子都同时是P类的分子，或者是少到S类中只有一个分子同时是P类的分子，SIP都是真的。因此，在客观世界中，当S类与P类有图1，2，3，4的关系时，SIP都是真的；只有当S类与P类有图5的关系时，SIP才是假的。

SOP断定“有的S不是P”，即断定了S类中有的分子x（表现为个体词）同时不是P类的分子，即存在着x，它虽然属于S但却不属于P，那就只有图3，4，5的情况。但究竟S类中有多少分子不是P类的分子，SOP命题是没有明确断定的。因此，不论是多到S类中的全部分子都不是P类的分子，或者少到S类中只有一个分子不是P类的分子，SOP都是真的。因此，在客观世界中，当S类与P类有图3，4，5的关系时，SOP都是真的；只有当S类与P类有图1，2的关系时，SOP才是假的。

三 谓词公式

（一）定义问题 用个体词、谓词和量词等符号把命题完全符号化后得到的式子就是谓词公式。谓词公式的形式定义是：

1．个体词为项；如果f为n元演算子，a_1，…，a_n为项，则f_{a_1}，…，a_n为项（在二元情况下，a_1fa_2也为项）；如果F为n元谓词，a_1，…，a_n为项，则Fa_1，…，a_n为原子公式（在二元情况下，a_1Fa_2也为原子公式）；原子公式为公式。

2．如果A是公式，那么$\neg A$是公式。

3．如果A和B是公式，那么（$A\wedge B$）、（$A\vee B$）、（$A\rightarrow B$）、（$A\longleftrightarrow B$）都是公式。

4．如果A是一公式并且Δ是一个体变项，则（Δ）A和（$\exists\Delta$）A是公式。

5．只有以上情况才是公式。

从这种形式定义可以看出，例如$F_{(x)}$，（x+y）$G_{(x)}$，x=y等都是原子公式，因为它们符合定义1的规定。而(x)，F，x等单独的量词、谓词和个体词都不是公式。当然，由于谓词逻辑是命题逻辑的继续，因而所有的命题公式都是谓词逻辑的公式。此外，公式的配置次序也和命题逻辑的有关规定相同。

（二）辖域问题 量词的辖域是量词所约束的范围。在量词

的辖域里，一切和量词里的变项相同的变项都被此量词所约束。如果量词后面有括号，则括号内的公式为此量词的辖域。如果量词后无括号，则量词后最短的公式为此量词的辖域。例如：

1．$(x)H_{(x,y)}$，整个$H_{(x,y)}$都是（x）的辖域。其中的x是被约束的，称为约束变项；其中的y是不被约束的，称为自由变项。

2．$(\exists_x)(y)H_{(x,y)}$，整个$(y)H_{(x,y)}$都是$(\exists_x)$的辖域，而$H_{(x,y)}$只是（y）的辖域。其中的x和y都是约束变项。

3．$(x)(F_{(x)}\longrightarrow(\exists_y)(H_{(x,y)}\wedge G_{(y)}))$，整个$(F_{(x)}\rightarrow(\exists_y)(H_{(x,y)}\wedge G_{(y)}))$都是(x)的辖域，尽管$G_{(y)}$中没有x，它也是在(x)的辖域之内。只有$(H_{(x,y)}\wedge G_{(y)})$才是$(\exists_y)$的辖域。$(\exists_y)$的辖域包含于(x)的辖域之中。

4．$(\exists_x)F_{(x)}\wedge(\exists_x)G_{(x)}$，它并不同于$(\exists_x)(F_{(x)}\wedge G_{(x)})$，这两个公式中的辖域范围是不一样的。前者分别在两处，后者为整个公式。我们如果举例说明的话，比如“至少有一偶数，并且至少有一素数”就可用前面公式表示，而“至少有一偶数是素数”则可用后面公式表示。

跟辖域问题相联系的是重迭量词问题。对于一元谓词，我们只能引用一次量词，或者是全称的或者是特称的，而不能引用两次或更多次。相对于一个多元谓词，例如二元谓词$H_{(x,y)}$则可以连续两次分别引用量词（全称和特称），因此在前面的量词中出现了(x)(y)，$(x)(\exists_y)$，$(\exists_x)(y)$，$(\exists_x)(\exists_y)$这样四种情况。

重迭量词经常出现在较为复杂的命题里，例如：“一切固体

都可以被某些液体所溶解"，用符号来表示就是(x)（固体(x)→($\exists_y$)（液体(y)∧y溶解x)），完全形式化则为(x)（$P_{(x)}$→($\exists_y$)（$Q_{(y)}$∧$R_{(x,y)}$)）。又如："一切自然数都有一个大于它的自然数"，用符号来表示就是(x)（自然数(x)→($\exists_y$)（自然数(y)∧y＞x)），完全形式化则为(x)（$P_{(x)}$→($\exists_y$)（$Q_{(y)}$∧$R_{(x,y)}$)）。

（三）永真问题 在命题逻辑中我们讲到重言式，重言式包括了人们思维中常用的全部复合命题的推理形式。重言式的特征在于，不论其中的变项取什么值，结果整个公式的值总是真的。谓词逻辑的公式中，也有一部分公式具有永真的性质。命题逻辑中的重言式是谓词逻辑中的这些具有永真性质的公式的一部分。谓词逻辑的公式，除了其中只出现命题变项的那一部分外，不是真值形式，因此我们不把谓词逻辑中具有永真性质的公式称作重言式，而称它们为永真公式，或称普遍有效的公式。在谓词逻辑的公式中，除了永真公式外，还有两类公式，一类称为可满足的，一类称为不可满足的。

1．永真公式 谓词逻辑中的一个公式是永真的，当且仅当用任一命题代入其中的命题变项，用任一个体词代入其中的个体变项，以及用任一谓词代入其中的谓词变项，其结果总是真的。我们也说永真公式是在一切个体域中都真的公式。除了全部重言式是永真公式外，下面的公式也都是永真公式(当然这只是举例)：

（1）$F_{(x)}$→（$G_{(y)}$→$F_{(x)}$） 它是由重言式p→（q→p）得来的。

（2）(x)（$F_{(x)}$∨¬$F_{(x)}$） 它是说，对于一切事物而言，一事物具有F性质或者不具有F性质。

（3）¬($\exists_x$)（$F_{(x)}$∧¬$F_{(x)}$） 它是说，不存在一个事物，它既有F性质又没有F性质。我们看到，不论F是什么性质，或者说不论F取什么值，公式(2)和(3)总是真的。

（4）$(x)F_{(x)}\rightarrow F_{(y)}$　它是说，如果一切事物有性质F，那么某一事物就有性质F。不论F和y取什么值，上述命题总是真的，因此公式（4）是永真公式。

（5）$(\exists_x)(F_{(x)}\wedge G_{(x)})\rightarrow(\exists_x)F_{(x)}\wedge(\exists_x)G_{(x)}$ 这是一个推理形式，它是说，如果有一事物既有性质F又有性质G，那么就有一事物有性质F并且有一事物有性质G。或者说，从前提"有一事物既有性质F又有性质G"，可以推出"有一事物有性质F并且有一事物有性质G"的结论。

以上公式的永真性在直观上都是很明显的。

2．可满足公式　谓词逻辑中的一个公式是可满足的，当且仅当至少有一组命题、个体词和谓词，将它们代入这公式中的相应的变项之后，其结果是真的。或者说，存在一个个体域，在这个个体域中，这个公式是可满足的，即用关于这个个体域的命题、个体和谓词代入这公式的相应的变项后，其结果是真的。例如：

（1）$p\vee q$　它明显地不是永真的重言式，但是只要代入p和q的命题有一个或两个都是真的，结果便是真的。例如："任何自然数都能被2整除，或者，有的自然数能够被2整除。"这就是真命题。但是有时候也会出现假命题，例如："任何自然数都能被2整除，或者，任何自然数都不能被2整除。"

（2）$(x)F_{(x)}$　此公式不是永真的，因为不是用任何谓词对F作代入后其结果都是真的，例如用"虚幻的"代入谓词F，所得"一切事物都是虚幻的"就是假命题。但至少有一个谓词即"发展变化的"，将它代入其中的F，得到命题"一切事物都是发展变化的"，这个命题就是真的。所以原谓词公式是可满足的。

（3）$(\exists_x)F_{(x)}\wedge(\exists_x)\neg F_{(x)}$　此公式在有两个不同个体的个体域中就是可满足的，因为在这有两个不同个体的个体域

中，总可以找到某一性质，其中一个个体有此性质而另一个个体没有此性质，例如“有的人务农，有的人不务农”。否则，对一切性质，这两个个体都同时具有某一性质，或者同时不具有某一性质，它们就不是不同的个体了。但它不是永真的，如在只有一个个体的个体域中，上面的公式就不可能是真的。

3．不可满足公式　谓词逻辑中的一个公式是不可满足的，当且仅当不论用什么命题、个体词和谓词，将它们代入这公式中的相应的变项之后，其结果总是假的。例如：

（1）$p\wedge\neg p$　不论用什么命题代入此公式中的p，p和$\neg p$不能同时都真，所以它是永假的或不可满足的。

（2）$(\exists x)(F_{(x)}\wedge\neg F_{(x)})$　不论用什么谓词代入此公式中的F，也不可能有一事物既有某一特定的性质又没有该性质，例如“有的自然数既是正数又不是正数”，这是一个假命题，因为并没有这样的自然数存在。

谓词公式的永真性和可满足性具有如下的关系：一个公式A是永真的，当且仅当它的否定$\neg A$是不可满足的。或者说，一个公式A是可满足的，当且仅当$\neg A$不是永真的。当然，如果一个公式A是永真的，那么这个公式A就一定是可满足的；反过来，如果一个公式A是可满足的，那么这个公式A不一定是永真的。

（四）判定问题　判定问题就是寻求一个一般性的方法，用它能够确定一个公式是否永真。这个一般性的方法是能行的方法，或者叫作机械性的程序，按照这种方法或程序对任给一个公式，第一步，第二步，…，都作什么，在某一步完成之后下一步作什么，每一步的作法都是明确规定了的，并且在有穷步内总能得出结果。现代逻辑已经证明，谓词逻辑的判定问题是不可解决的，就是说，用来判定谓词逻辑的一个公式是否永真的这种能行方法（机械性程序）是没有的。这里说的没有不是说现在没有或还没有找到，而是说根本不存在。整个谓词逻辑是不可判定的，

但是其中某几部分和某些特殊类型的公式是可判定的。下面作些介绍。

1.命题公式　只包含命题变项和联结词的公式的永真性是可判定的，即命题逻辑部分是可判定的。一个命题逻辑的永真公式就是一个重言式，而用真值表方法就能判定一个命题逻辑公式是不是重言式即永真公式。

2.一元谓词　只包含一元谓词变项的公式是可判定的，因此传统形式逻辑中讲的各种推理形式是否正确是可判定的，因为它们所讲的各种推理形式如直接推理和三段论等都只包含一元谓词。我们知道，谓词逻辑公式是否永真的判定问题所以不可解决，主要由于涉及无穷个体域的问题。仅只对于有穷个体域来说，谓词逻辑公式的永真性是可判定的。在个体域是有穷时，谓词逻辑的公式就可以按一定的方法消去量词而把它转换成为命题逻辑的公式，于是判定一个公式是否永真的问题，就变成判定一个公式是不是重言式的问题，这就可以用到命题逻辑中的若干判定方法。

设个体域中的个体数为n，我们用｛1，2，3，…，n｝来表示。那么，

（1）公式$(x)F_{(x)}$表示“一切x都是F”，在以上个体域中，这等于说“1是F，并且2是F，…，并且n是F”，因此，

$$(x)F_{(x)}=F_{(1)}\wedge F_{(2)}\wedge\cdots\wedge F_{(n)}。$$

这样，一个全称量词就是一个合取式，其中$F_{(1)}$，$F_{(2)}$，…，$F_{(n)}$都不含个体变项和量词，它们实际上都是一些命题变项。于是，谓词逻辑中的公式$(x)F_{(x)}$就变成了命题逻辑中的一个公式。

(2)公式$(\exists x)F_{(x)}$表示“有的x是F”，在上述个体域中，这等于说“1是F，或者2是F，…，或者n是F”，因此，

$$(\exists x)F_{(x)}=F_{(1)}\vee F_{(2)}\vee\cdots\vee F_{(n)}。$$

这样，一个存在量词就是一个析取式，等式右边是命题逻辑中的一个公式。

有了如上(1)，(2)最基本的转换方法之后，于是我们就有如下推广的最一般的转换方法。

$(3)\ (x)A_{(x)}=A_{(1)}\wedge A_{(2)}\wedge\cdots\wedge A_{(n)}$。

例如，$(x)(F_{(x)}\rightarrow G_{(x)})=(F_{(1)}\rightarrow G_{(1)})\wedge(F_{(2)}\rightarrow G_{(2)})\wedge\cdots\wedge(F_{(n)}\rightarrow G_{(n)})$。

$(4)\ (\exists_x)A_{(x)}=A_{(1)}\vee A_{(2)}\vee\cdots\vee A_{(n)}$。

例如，$(\exists_x)(F_{(x)}\wedge G_{(x)})=(F_{(1)}\wedge G_{(1)})\vee(F_{(2)}\wedge G_{(2)})\vee\cdots\vee(F_{(n)}\wedge G_{(n)})$。

更复杂的公式都可以这样一步一步地转换成一个命题逻辑中的公式。当然，这种转换方法只有在个体域有穷时才能实行，当个体域无穷时，即{1，2，3，…}，那么

$(x)F_{(x)}=F_{(1)}\wedge F_{(2)}\wedge\cdots$

$(\exists_x)F_{(x)}=F_{(1)}\vee F_{(2)}\vee\cdots$

可以看出，全称命题变成了无穷合取形式，特称命题变成了无穷析取形式，而无穷合取和无穷析取都不是我们的命题逻辑里严格意义的公式即真值形式。因此，当个体域无穷时，谓词逻辑的公式不能通过这种方法转换成命题逻辑里的公式。所以这个方法只能对某些特殊类型的谓词逻辑公式提供一个判定方法。这些特殊类型的公式都有这样的性质：一个公式A是永真的，当且仅当它在某一有特定个体数的个体域中是永真的。例如前面提到的只包含一元谓词变项的公式。

为了说明得更清楚，我们举两个变换的例子。设个体域为{1，2}。

例1. $(x)F_{(x)}\rightarrow(\exists_x)F_{(x)}$，这个公式可以转换成$F_{(1)}\wedge F_{(2)}\rightarrow F_{(1)}\vee F_{(2)}$，它可以被看成跟命题公式$p\wedge q\rightarrow p\vee q$是等价的。这是一个重言式，因此在个体域{1，2}中是永真的。

例2. $(x)(y)R(x, y)$，这个公式可以按如下步骤进行转换：

（1）先消去量词(x)，得$(y)R(1, y) \wedge (y)R(2, y)$。

（2）再消去量词(y)，得$R(1, 1) \wedge R(1, 2) \wedge R(2, 1) \wedge R(2, 2)$。对于消去量词所得到的公式，我们以$R(1, 1)$和$R(2, 2)$为真，以$R(1, 2)$和$R(2, 1)$为假。很明显，上面通过消去量词得到的公式(2)不是重言式，它在个体域$\{1, 2\}$中不永真，所以原式不是永真公式。

以上介绍的方法能够解决若干类特殊类型的谓词逻辑公式的判定问题，如：

1．只包含一元谓词变项的公式。一个只含K个一元谓词变项而不包含多元谓词变项的公式A是永真的，当且仅当A在2^K个个体的个体域中永真。

2．具有形式$(x_1)(x_2)\cdots(x_n)A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的公式(即只含有全称量词的公式)，A中不再有量词和其他的自由个体变项。这个公式是永真的，当且仅当它在n个个体的个体域中永真。

3．具有形式$(\exists x_1)(\exists x_2)\cdots(\exists x_n)A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的公式（即只含有存在量词的公式），A中不再有量词和其他的自由个体变项。这个公式是永真的，当且仅当它在只有一个个体的个体域中是永真的。

四　谓词公式判定的绘图方法

在谓词逻辑中，谓词公式的判定问题是个十分重要的问题，我们有必要多介绍一些方法。下面介绍的是一种直观性很强的绘图方法。

（一）一元谓词逻辑公式的判定程序

首先介绍公式的“主符号”这个术语。当公式i成为$(x)P(x)$

$\wedge(\exists_x)Q_{(x)}$这样形式的时候，公式的主符号指的是“$\wedge$”这个逻辑联结词。如果公式i成为$\neg((x)P(x)\to(\exists_x)Q_{(x)})$这样的形式，那么公式i的主符号指的是“$\neg$”这个联结词。另外，当公式i成为$(x)(P_{(x)}\vee\neg Q_{(x)})$这样形式的时候，公式i的主符号指的是“(x)”这个量词符号。

下面依次讲些规则。

规则1—1 为了判定公式i的永真性，就得赋予公式i以假的真值。（写法是：在公式i的主符号下面写上0，即$\underset{0}{i}$）

规则1—2 为了判定公式i的永假性，就得赋予公式i以真的真值。（写法是：在公式i的主符号下面写上1，即$\underset{1}{i}$）

这种规则跟命题逻辑公式的情况相同。例如，在判定公式$(x)P_{(x)}\wedge(\exists_x)Q_{(x)}$的永真性时，因为公式主符号是$\wedge$，所以根据规则1—1就写成$(x)P_{(x)}\underset{0}{\wedge}(\exists_x)Q_{(x)}$。如果判定公式$\neg((x)P_{(x)}\to(\exists_x)Q_{(x)})$的永假性，那么由于主符号是$\neg$，所以就写成$\underset{1}{\neg}((x)p_{(x)}\to(\exists_x)Q_{(x)})$。

如下规则只适用于被赋予真值的公式中不包含自由个体变项的情况。

规则2 设公式i中不包含自由个体变项。如果公式i的主符号是联结词，那就要在被联结的部分公式上赋予能使公式i的真值得以成立的真值。（图式跟命题逻辑的情况相同）

规则3 当被赋予真值的公式i中的主符号是量词符号时，则有如下情况：

3—1 当对全称符号赋值为真时，则对除掉全称符号后所余公式中的主符号赋值为真。

3—2 当对存在符号赋值为假时，则对除掉存在符号后所余公式中的主符号赋值为假。

3—3 当对全称符号赋值为假时，则在被全称量化的个体变

项的整个变域中，对能够代入a的公式的主符号赋值为假。（a是还没被使用的个体常项；如果已被使用，就改用b；以此类推）

3—4　当对存在符号赋值为真时，则在被存在量化的个体变项的整个变域中，对能够代入a的公式的主符号赋值为真。（a是还没被使用的个体常项；如果已被使用，就改用b；以此类推）

3—1的例子：

$$(x)(P_{(x)} \rightarrow Q_{(x)})$$
|
$$P_{(x)} \rightarrow Q_{(x)}$$
|

3—2的例子：

$$(\exists x)(P_{(x)} \vee \neg Q_{(x)})$$
0
$$P_{(x)} \vee \neg Q_{(x)}$$
0

3—3的例子：

$$(x)(P_{(x)} \rightarrow Q_{(x)})$$
0
$$P_{(a)} \rightarrow Q_{(a)}$$
0

但是3—3中像这样的情况就不允许：

$$(x)(P_{(a)} \rightarrow Q_{(x)})$$
0
$$P_{(a)} \rightarrow Q_{(a)}$$
0

因为在原公式中a已经被使用，所以这时候要使用其他个体常项的符号：

$$(x)(P_{(a)} \rightarrow Q_{(x)})$$
0
$$P_{(a)} \rightarrow Q_{(b)}$$
0

3—4的例子：

$(\exists x)(P_{(x)} \vee \neg Q_{(x)})$
|
$P_{(a)} \vee \neg Q_{(a)}$
|

但是3—3中像这样的情况就不允许：

$(\exists x)(P_{(a)} \vee \neg Q_{(x)})$
|
$P_{(a)} \vee \neg Q_{(a)}$
|

因为在原公式中a已经被使用，所以这时候要使用其他个体常项的符号：

$(\exists x)(P_{(a)} \vee \neg Q_{(x)})$
|
$P_{(a)} \vee \neg Q_{(b)}$
|

如下规则只适用于在所有步骤上不能应用规则2和3，而又被赋予了真值的公式。

规则4 设公式i被赋予真值后还包含自由个体变项。

4—1 对于带有个体变项的同一谓词，如果在其他步骤中还带有个体常项，那就将这所有的常项都代入此变项，然后赋予真值。

4—2 对公式i赋予真值后的各步骤中，如果没有出现个体常项，那就用x代入所有的变项，然后赋予真值。

4—1的例子：

① $(\exists_x)P_{(x)} \wedge (\exists_x)Q_{(x)} \underset{0}{\rightarrow} (\exists_x)(P_{(x)} \wedge Q_{(x)})$

（规则1—1）

② $(\exists_x)P_{(x)} \underset{|}{\wedge} (\exists_x)Q_{(x)}$ （①，规则2）

③ $\underset{0}{(\exists_x)}(P_{(x)} \wedge Q_{(x)})$ （①，规则2）

④ $\underset{|}{(\exists_x)}P_{(x)}$ （②，规则2）

⑤ $(\exists x)Q_{(x)}$ （②，规则2）

|

⑥ $P_{(a)}$ （④，规则3—4）

|

⑦ $Q_{(b)}$ （⑤，规则3—4）

|

⑧ $\underset{0}{P_{(x)} \wedge Q_{(x)}}$ （③，规则3—2）

⑨ $\underset{0}{P_{(a)} \wedge Q_{(a)}}$ （⑧，规则4—1）

⑩ $\underset{0}{P_{(b)} \wedge Q_{(b)}}$ （⑧，规则4—1）

在（9），（10）步骤中应用规则4—1，就是说，由于在（6），（7）中出现了个体a，b，所以就将这些个体符号都代入（8）式而得到（9）和（10）。

4—2的例子：

① $(x)P_{(x)} \underset{0}{\longrightarrow} (\exists x)Q_{(x)}$ （规则1—1）

② $\underset{1}{(x)P_{(x)}}$ （①，规则2）

③ $\underset{0}{(\exists x)Q_{(x)}}$ （①，规则2）

④ $\underset{1}{P_{(x)}}$ （②，规则3—1）

⑤ $\underset{0}{Q_{(x)}}$ （③，规则3—2）

⑥ $\underset{1}{P_{(a)}}$ （④，规则4—2）

⑦ $\underset{0}{Q_{(a)}}$ （⑤，规则4—2）

就这样通过对1至4规则的有限次应用而对命题赋予真值，从而使判定问题接近于命题逻辑中的情况。就是说，在永真式的判

定程序中，如果所有的分支都是"X"，那么与式（原公式）就是"永真"；如果至少有一个分支不是"X"，那么与式就"不是永真"。在永假式的判定程序中，如果所有的分支都是"X"，那么与式就是"永假"；如果至少有一个分支不是"X"，那么与式就"不是永假"。

例1. 判定$P_a \longrightarrow (\exists x) P_x$。

① $\underset{0}{P_{(a)} \longrightarrow (\exists x) P_{(x)}}$ （规则1）

② $\underset{1}{P_{(a)}}$ （①，规则2）

③ $\underset{0}{(\exists x) P_{(x)}}$ （①，规则2）

④ $\underset{0}{P_{(x)}}$ （③，规则3—2）

⑤ $\underset{0}{P_{(a)}}$ （④，规则4—1）

X ∴永真

例2. 判定$\neg (x) P_{(x)} \longleftrightarrow (\exists x) \neg P_{(x)}$。

① $\underset{0}{\neg (x) P_{(x)} \longleftrightarrow (\exists x) \neg P_{(x)}}$

② $\underset{1}{\neg (x) P(x)}$ （①）

③ $\underset{0}{(\exists x) \neg P(x)}$ （①）

⑥ $\underset{0}{(x) P(x)}$ （②）

⑦ $\underset{0}{P(a)}$ （⑥）

⑧ $\underset{0}{\neg P(x)}$ （③）

⑨ $\underset{0}{\neg P(a)}$ （⑧）

④ $\underset{0}{\neg (x) P(x)}$ （①）

⑤ $\underset{1}{(\exists x) \neg P(x)}$ （①）

⑪ $\underset{1}{(x) P(x)}$ （④）

⑫ $\underset{1}{P(x)}$ （⑪）

⑬ $\underset{1}{\neg P(a)}$ （⑤）

⑭ $\underset{0}{P(a)}$ （⑬）

⑩P (a) (⑨)　　　　　　　　⑮P (a)　　　(⑫)
1　　　　　　　　　　　　　　　1
X　　　　　　　　　　　　　　　X

∴永真

例3. 判定 $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \longrightarrow (\exists x)\cdot(P(x) \wedge Q(x))$。

判定甲：

① $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \longrightarrow (\exists x)\ (P(x) \wedge Q(x))$
0
(规则1—1)

② $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$　　(①)
1

③ $(\exists x)\ (P(x) \wedge Q(x))$　　(①)
0

④ $(\exists x)P(x)$　　(②)
1

⑤ $(\exists x)Q(x)$　　(②)
1

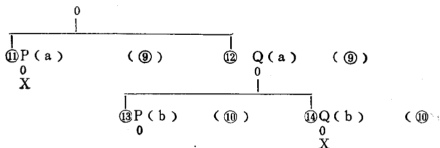
⑥ P (a)　　(④)
1

⑦ Q (b)　　(⑤)
1

⑧ P (x) ∧Q (x)　　(③)
0

⑨ P (a) ∧Q (a)　　(⑧)
0

⑩ P (b) ∧Q (b)　　(⑧)



$\therefore$不是永真

判定乙：

①$(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)\underset{1}{\longrightarrow}(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$（规则1—2）

②$\underset{0}{(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)}$

③$\underset{1}{(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))}$

④$\underset{0}{(\exists x)P(x)}$ ⑤$\underset{0}{(\exists x)Q(x)}$

⑥$\underset{1}{P(a)\wedge Q(a)}$ ⑦$\underset{0}{P(x)}$

⑧$\underset{0}{Q(x)}$ ⑨$\underset{1}{P(a)}$

⑩$\underset{1}{Q(a)}$ ⑪$\underset{0}{P(a)}$

⑫$\underset{0}{Q(a)}$ $\therefore$不是永假

$\therefore$根据判定甲、乙，可知与式是可满足式。

如果对判定甲中的公式⑧错误地应用规则2，那就会像下面这样得到所谓永真的错误结果。

①

⋮

⑧$\underset{0}{P(x)\wedge Q(x)}$ （③）

⑨$\underset{0}{P(x)}$（⑧） ⑩$\underset{0}{Q(x)}$（⑧）〔⑨和⑩是错误地对⑧应用规则2〕

⑪$\underset{0}{P(a)}$ ⑫$\underset{0}{Q(a)}$

X X

$\therefore$永真

因为⑧式中的x是自由变项，所以不能应用规则2。正确的方法应该象前面一样先应用规则4而得到⑨P（a）∧Q（a）和⑩P（b）∧Q（b），并由此再应用规则2。

例4. 判定 $(x)(\exists_y)(P_{(x)}\wedge Q_{(y)})\longrightarrow(\exists_y)(x)(P_{(x)}\wedge Q_{(y)})$

① $(x)(\exists_y)(P_{(x)}\wedge Q_{(y)})\underset{0}{\longrightarrow}(\exists_y)(x)(P(x)\wedge Q(y))$

② $\underset{1}{(x)}(\exists_y)(P_{(x)}\wedge Q_{(y)})$ （①）

③ $(\exists_y)(x)(P_{(x)}\wedge Q_{(y)})$ （①）

④ $\underset{1}{(\exists_y)}(P_{(x)}\wedge Q_{(y)})$ （②）

⑤ $\underset{0}{(x)}(P_{(x)}\wedge Q_{(y)})$ （③）

⑥ $\underset{1}{(\exists_y)}(P_{(a)}\wedge Q_{(y)})$ （④）

⑦ $P(a)\underset{1}{\wedge}Q(b)$ （⑥）

⑧ $\underset{1}{P(a)}$ （⑦）

⑨ $\underset{1}{Q(b)}$ （⑦）

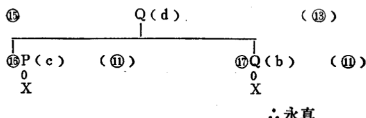
⑩ $\underset{0}{(x)}(P(x)\wedge Q(b))$ （⑤）

⑪ $P(c)\underset{0}{\wedge}Q(b)$ （⑩）

⑫ $\underset{1}{(\exists_y)}(P(c)\wedge Q(y))$ （④）

⑬ $P(c)\underset{1}{\wedge}Q(d)$ （⑫）

⑭ $\underset{1}{P(c)}$ （⑬）



∴永真

（二）多元谓词逻辑公式的检验方法

在多元谓词逻辑公式中存在着通过有限步骤并不能判定其永真、永假和可满足的问题。但是，作为以类似判定程序的原则和实践为标准的机械方法，却对多元谓词发挥作用。因此我们把应用这种方法的地方称作永真、永假的检验方法。下面我们先只就规则1至4来看，研究一下多元谓词逻辑公式的检验方法。

例5. 检验 $(\exists_y)(x)R(x,y) \longrightarrow (x)(\exists_y)R(x,y)$ 的永真性。

① $(\exists_y)(x)R(x,y) \underset{0}{\longrightarrow} (x)(\exists_y)R(x,y)$

② $\underset{1}{(\exists_y)}(x)R(x,y)$　　（①）

③ $\underset{0}{(x)}(\exists_y)R(x,y)$　　（①）

④ $\underset{1}{(x)}R(x,a)$　　（②）

⑤ $\underset{0}{(\exists_y)}R(b,y)$　　（③）

⑥ $\underset{1}{R}(x,a)$　　（④）

⑦ $\underset{1}{R}(b,a)$　　（⑥）

⑧ $\underset{0}{R}(b,y)$　　（⑤）

⑨$R(b, a)$ (⑧)
0
X

∴永真

例6.检验$(x)(y)(\exists_z)R(x, y, z) \longrightarrow (x)(\exists_y)(z)R(x, y, z)$的永真性。

①$(x)(y)(\exists_z)R(x, y, z) \underset{0}{\longrightarrow} (x)(\exists_y)(z)R(x, y, z)$

②$(x)(y)(\exists_z)R(x, y, z)$ (①)
1

③$(x)(\exists_y)(z)R(x, y, z)$ (①)
0

④$(y)(\exists_z)R(x, y, z)$ (②)
1

⑤$(\exists_y)(z)R(a, y, z)$ (③)
0

⑥$(z)R(a, y, z)$ (⑤)
0

⑦$(y)(\exists_z)R(a, y, z)$ (④)
1

⑧$(\exists_z)R(a, y, z)$ (⑦)
1

⑨$(z)R(a, a, z)$ (⑥)
0

⑩ $R(a, a, b)$ (⑨)
0

⑪$(\exists_z)R(a, a, z)$ (⑧)

⑫ $R(a, a, c)$ (⑪)
1

∴不是永真

下面例子是不能在有限步骤内终止检验的公式。非常明显，

检验永真性如果不能在有限步骤内终止，那就不是永真。

例7. 检验 $(x)(\exists_y)R(x, y) \longrightarrow (\exists_y)(x)R(x, y)$ 的永真性。

① $\underset{0}{(x)(\exists_y)R(x, y) \longrightarrow (\exists_y)(x)R(x, y)}$

② $\underset{1}{(x)(\exists_y)R(x, y)}$ （①）

③ $\underset{0}{(\exists_y)(x)R(x, y)}$ （①）

④ $\underset{1}{(\exists_y)R(x, y)}$ （②）

⑤ $\underset{0}{(x)R(x, y)}$ （③）

⑥ $\underset{1}{(\exists_y)R(a, y)}$ （④）

⑦ $\underset{1}{R(a, b)}$ （⑥）

⑧ $\underset{0}{(x)R(x, b)}$ （⑤）

⑨ $\underset{0}{R(c, b)}$ （⑧）

⑩ $\underset{1}{(\exists_y)R(c, y)}$ （④）

⑪ $\underset{1}{R(c, d)}$ （⑩）

⑫ $\underset{0}{(x)R(x, d)}$ （⑤）

⑬ $\underset{0}{R(e, x)}$ （⑫）

⋮

由于在④式中出现了自由变项x，所以应用规则4—2而 代入a。但是，由于⑨式中在x项上又出现了c，所以就像在 规 则4—2的条件下需要对出现x的谓词代入全部个体常项一样，还 需 要对

④式中的x代入c。同样地，⑬也在x的位置上出现了e，所以还需要有对⑭的x入代e的公式。像这样，无限地出现新的个体常项的公式将延续不断。

所以原公式不是永真。

五 摹状词问题

摹状词理论是现代逻辑中的一个专门分支，这里不准备做详细讨论，只是介绍这种理论中最基本的内容。

（一）概说　描述满足某种条件的、存在一个并且仅仅存在一个的（即数学中称为唯一的）那种事物时所使用的现代逻辑名词，换句话说，摹状词就是通过揭示某一个体的独有属性来指称该个体的语词。摹状词具备两个特点：第一，它指称的个体应当是唯一的；第二，它所揭示的一个体的某种属性应当是该个体独有的。摹状词在日常生活的语言中、在科学技术的文献中都经常出现。例如，“中华人民共和国的首都”，“世界上最高的山峰”，“15和27的最大公约数”等语句所指的事物都是唯一的。通常摹状词用符号“ιx”来表示。ιx（…）就表示：“满足…条件的那个唯一的x。”设F（x）表示“x是中华人民共和国的首都”，G（x）表示“x是15和27的最大公约数”。则$\iota x F(x)$就表示“是中华人民共和国首都的那个唯一的城市北京”，$\iota x G(x)$就表示“是15和27的最大公约数的那个唯一的自然数3”。当满足…条件的x不存在或不只一个时，对表达式ιx（…）意义的规定并没统一。按希尔伯特和贝尔奈斯在《数学基础》一书中的论述，则只有当摹状词所指的事物具有唯一性时，摹状词才有意义，否则摹状词就没有意义。例如，使$2x=6$成立的x有且仅有一个数3，所以表达式$\iota x(2x=6)$是有意义的，并且它就表示：使$2x=6$成立的那个唯一的数3。而使$x^2+3x+2=0$成立的x有两个数：-1和-2。因而不是唯一的，所以$\iota x(x^2+3x+2=0)$

就是没有意义的。使$3x<15$并且使$2x=16$同时成立的x一个也没有，因而$\iota x(3x<15且2x=16)$也是没有意义的。另外，也有的现代逻辑学家对摹状词不具有唯一性时，把含有此摹状词的公式规定为假的情形。以下进一步说明。

（二）结构　在自然语言中，摹状词的结构是：

形容词（或词组）＋普通名词

或者，　指示代词＋形容词＋普通名词

这样就可以构成摹状词，例如："世界上最高的山峰"，"美国的第一次宇宙飞行"等等。在需要的时候除了形容词组以外，还可以用指示代词"那个"来表示特指意思，例如"3和5之间的那个偶数"，用以表示我们所指称的个体只有一个唯一的存在。这样就可以和表示一类事物的词组，例如"3和15之间的那些偶数"有所区别了。

摹状词的一般形式写作：$\iota xF(x)$。它表明：那个唯一具有性质F的个体x。或者说：满足x是F条件的那个唯一个体x。

（三）真假　一个含有摹状词的命题$H(\iota xF(x))$只有在下面三条得到满足时才是真的：1. 至少有一x是F；2. 至多有一x是F；3. 这x就是H。例如，"在3和5之间的那个偶数是4"，此命题为真，因为：1. 在3和5之间有一偶数；2. 在3和5之间只有一偶数；3. 此偶数是4。第1和2条就是所谓摹状词的唯一性，用符号表达是：

$$(\exists x)F(x)\wedge(x)(y)(F(x)\wedge F(y)\longrightarrow x=y)$$

这公式也表达了"有且只有一个"或"恰好有一个"。上述三条是含有摹状词命题为真的条件，只有这三条都满足了，这种命题才是真的。

相反，如果上述三条不能满足，情况该怎样呢？首先，如果第1和2条满足了，而第3条不能满足，则含有摹状词的命题为假。例如，"在3和5之间的那个偶数是2"，就是假的，因为没

能满足条件3。

其次，如果第1条或者第2条不能满足，就是说，个体x 或者没有或者有许多，总之摹状词不具有唯一性，那么问题就复杂多了。摹状词的作用在于反映一特定事物，所以一般语言大都要求摹状词所描述的对象是唯一的。如果摹状词的应用不合这一要求，那就是"用词不当"，有些摹状词的句子在语法上就是欠缺的。比如：

在3和4之间的那个偶数；

在3和15之间的那个偶数。

在3和4之间的那个偶数是不存在的，这个摹状词根本无所指称。在3和15之间不只有一个偶数，然而命题中所谓"那个偶数"到底指称哪一个，实在不明确，所以命题真假不易判定。以上两种句子，一种是摹状词所指称的对象根本不存在，一种是摹状词所指称的对象不只有一个，这两种情况在日常语言中都不是正确规范的摹状词情况，语法上都有缺陷。然而它们是否算假的命题呢？在日常语言的语法里，对于某些字的组合来说，"假"和"无意义"是没有严格区分的，所以上述命题说"假"也可，说"无意义"也可。

（四）处理　现代逻辑对摹状词问题有多种处理方法，比如：

1．罗素方法　如一摹状词不具有唯一性，则含有此摹状词的命题为假。2．希尔伯特方法：如一摹状词不具有唯一性，则含有此摹状词的命题无意义，其公式不是一合式公式。3．贝奈斯方法：如一摹状词不具有唯一性，则它等于一个体变项，或者指称某一先行规定的事物。我们只介绍一下罗素方法。

摹状词只在如下两类命题中出现：

那个有性质F的事物存在，

那个有性质F的事物是H。

我们用符号E! 表示存在，上面两类命题就可表示为：

$E!\ \iota xF(x)$，

$H(\iota xF(x))$。

一旦再给出这两类命题的等值命题，给出这两类命题的转换规则，我们就会得到摹状词的定义。这种定义和一般定义不同，它是一种“使用定义”。通过使用定义，我们可以将含有摹状词的语句转换为不含有摹状词的语句，实际上它们是两个关于摹状词的销去规则。

定义一 $E!\ \iota\Delta_1 A(\Delta_1)$ 定义为

$(\Delta_1)(\Delta_2)(A(\Delta_1)\wedge A(\Delta_2)\longrightarrow\Delta_1=\Delta_2)\wedge(\exists\Delta_1)A(\Delta_1)$。定义项的前半部分表示至多有一A，即：对于所有$\Delta_1$和所有$\Delta_2$而言，如果$\Delta_1$是A并且$\Delta_2$也是A，那么$\Delta_1$等于$\Delta_2$。定义项的后半部分表示至少有一A，即：有$\Delta_1$，$\Delta_1$是A。$\iota\Delta_1 A(\Delta_1)$存在，就等于说恰好有一A。

定义二 $(\iota\Delta_1 A(\Delta_1))B(\iota\Delta_1 A(\Delta_1))$定义为

$(\Delta_1)(\Delta_2)(A(\Delta_1)\wedge A(\Delta_2)\longrightarrow\Delta_1=\Delta_2)\wedge(\exists\Delta_1)(A(\Delta_1)\wedge B(\Delta_1))$。定义项的前半部分表示至多有－A，后半部分表示至少有一A并且此A是B。唯一不同之处在于，$B(\iota\Delta_1 A(\Delta_1))$之前有一$(\iota\Delta_1 A(\Delta_1))$。这是表示辖域的。

以上两个定义的右方都没有摹状词，它们给出了如何把一个含有摹状词的公式转换为一个不含有摹状词的公式的规则。

关于摹状词的辖域。摹状词和量词有密切联系，都涉及到辖域问题，辖域不确定就会出现歧义。例如在公式$\neg H(\iota xF(x))$中，如果取部分公式$H(\iota xF(x))$作为摹状词的辖域，即把原公式理解为$\neg(\iota xF(x))H(\iota xF(x))$，则原公式等值于

$$1.\ \neg((x)(y)(F(x)\wedge F(y)\longrightarrow x=y)$$
$$\wedge(\exists x)(F(x)\wedge H(x)))$$

它等值于

$$\neg(x)(y)(F(x)\wedge F(y)\longrightarrow x=y)\vee\neg(\exists x)(F(x)\wedge H(x))$$

其解释是

$\iota xF(x)$有性质H，这是假的。

如果取全部公式作为摹状词的辖域，即把原公式理解为

$(\iota xF(x))\neg H(\iota xF(x))$，则原公式等值于

$$2.\ (x)(y)(F(x)\wedge F(y)\longrightarrow x=y)\wedge(\exists x)(F(x)\wedge\neg H(x))$$

其解释是

$\iota xF(x)$不是H，

假如$\iota xF(x)$不存在，没有唯一的$\iota xF(x)$，那么1真而2假。

可以看出，如摹状词的辖域是全部公式，那么，除非摹状词所描述的对象存在，有关公式不能为真。但是如果摹状词的辖域只是部分公式，则即使摹状词所描述的对象不存在，有关公式还可能是真的。如果不指出辖域，那么一公式中摹状词的辖域可以有不同的取法，从而得到不同的解释和不同的与原公式等值的公式。因此，在上述摹状词的第二个定义里附有表示辖域的符号$(\iota\Delta_1 A(\Delta_1))$。

六 关系逻辑问题

关系逻辑是以事物间的任意性质的关系为基础，来研究关于这些关系的逻辑推演规律的理论。关系逻辑首先为英国的德·摩根和美国的皮尔斯所研究，后又为德国的施罗德在其《关系的代数与逻辑》一书中所扩展和完善。

（一）关系 关系就是指存在于若干事物之间的某种相互联系。例如，逻辑学中类与类之间就存在着同一关系、上属关系、下属关系、交叉关系、全异关系等等；数学中实数之间就存在着

等于关系、不等于关系、大于关系、不大于关系、小于关系、不小于关系等等。对于两个确定的事物，从各种不同的角度来考察，就有各种不同的关系。例如，社会上的两个人之间，就其出生地而言可有同乡关系或非同乡关系，就其读书的学校而言，可有同学关系或非同学关系等。又如，平面几何中的两个圆之间，就其面积而言，可有大于、等于或小于关系，就其位置而言，可有外离、外切、相交、重合、内切以及一个包含另一个的关系。关系概念随处可见，因而在逻辑学中十分重视关系的性质及其规律的研究。

现代逻辑将各种关系常用一些简明的符号来表示。例如，个体x与个体y有相等关系时，则记为$x=y$，个体x与类M之间有属于关系时，则记为$x\in M$。一般的情形，x与y具有某种关系R时，就记为：xRy，或$R(x, y)$。逻辑学中专门研究具有任意性质的关系及其规律的理论称为关系理论。例如一种关系是否具有自反性、对称性、传递性、连通性等等都是关系理论的研究内容。

在各种关系中，二元关系是最基本的关系。我们在讲二元关系之前，先介绍一下其他概念。

有序偶。对象x和y的有序偶(x, y)（或$\langle x, y\rangle$）是以一定次序，即x作为第一个而y作为第二个的两个对象。对于有序偶相等的要求如下：$(x,y)=(u,v)$当且仅当$x=u$且$y=v$。因此，$(x, y)\neq(y, x)$，除非$x=y$，即，只有$x=y$才有$(x, y)=(y, x)$。

有序三元组。有序三元组可以通过有序偶定义如下：$(x,y,z)=((x, y), z)$。当然，推而广之，一般地说有序n元组$(x_1,x_2\cdots,x_n)$可以定义如下：$(x_1, x_2, \cdots,x_n)=((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n)$。

二元关系　二元关系是承担关系的对象组成的有序偶的集

合。例如，用谓词“是父亲”指称的关系（即父子关系）是所有那些使得x是y的父亲的有序偶（x，y）的集合。属于集合{（1，2，…，10}的数间所具有的平方关系是集合{（1，1），（4，2），（9，3）}。

三元关系　三元关系是被关系联系的对象组成的有序三元组的集合。例如，被谓词“把…付给…”是使得x把y付给z的所有有序三元组（x，y，z）的集合。一般地说，n元关系是承担关系的对象所组成的n元组的集合。

源关系　所有那些使得x属于集合A而y属于集合B的有序偶（x，y）的集合称作A和B的笛卡儿积（交叉乘积），我们用符号A×B来表示。于是，（x，y）∈A×B，当且仅当x∈A并且y∈B。所谓在A上的源关系是指笛卡儿积A×A，即可以由A的元素形成的所有有序偶的集合。空关系是决不会成立的关系，即没有有序偶属于它的关系。

子关系　如果R和S是这样的关系，使得每个有序偶既属于R，又属于S（即如果R⊆S），那么R称作S的子关系。例如，“是父亲”关系是“是长者”关系的子关系，“是表兄弟”关系是“是亲戚”关系的子关系。当然，在A中的每种关系R都是A×A的子关系。空关系是每种关系的子关系。

关系域　对于类K中的一个确定的关系R来说，其所有前趋构成的类，称为关系R的前域；其所有后继构成的类，称为关系R的后域。例如，设类K为自然数集，讨论关系“大于”时，则有3>2，7>4等等。因为对任何一个自然数来说，总有比它大的自然数，所以任何自然数都能成为大于关系的后继，从而大于关系的后域就是自然数全体所构成的类。但1不能大于任何的自然数，因而不能作为大于关系的前趋，而其他的任何自然数都能成为大于关系的前趋，所以大于关系的前域就是除1以外的全体自然数所构成的类。再如，对于“同一”关系来说，任何事物都和它自

已有同一关系，因而任何事物都既是同一关系的前趋，又是同一关系的后继，所以同一关系的前域和后域都是全域。

关系运算　因为关系是集合的特定的类，所以关系集合的每种运算也可以运用于关系。关系运算有多种表示形式，这里先简要介绍一种，后面再介绍另一种；其实形式不同而本质一样。具体说，关系R和S的并是使得有序偶（x，y）属于它的关系，当且仅当（x,y）∈R或（x,y）∈S；我们用R∪S表示关系并。关系R和S的交（积）是使得有序偶属于它的关系，当且仅当（x，y）∈R并且（x，y）∈S；我们用R∩S表示关系交。关系R和S的差是使得有序偶（x，y）属于它，当且仅当（x，y）∈R而并非（x，y）∈S；我们用R—S表示关系差。关系R在A中的补是差A×A－R；我们用$\overline{R}$（或R′）表示关系补。例如，假设R表示"是父亲"关系，S表示"是朋友"关系，于是：

（x，y）∈R∪S当且仅当x是y的父亲或朋友；

（x，y）∈R∩S当且仅当x是y的父亲和朋友；

（x，y）∈R—S当且仅当x是y的父亲但不是朋友；

（x，y）∈$\overline{R}$当且仅当x不是y的父亲。

（二）二元关系　二元关系有某些形式的特性，其中重要的是：

1．自反性，反自反性，非自反性

自反性定义：给出一个集合A（设A为非空集合，下同），若对于每一个x∈A，就有xRx（即（x，x）∈R），则说二项关系R在集合A中是自反的。用符号表示为：

R在A中自反←→（x）（x∈A—→xRx）。

例如，"是因子"关系在自然数集合中就是自反的，因为每个自然数都是它自己的因子。另外，不大于（≤）关系在所有实数的集合中是自反的，因为对于每个x，有x≤x成立，即（x）（x∈实数集—→x≤x）。

再如，设A_1＝｛北京，天津｝，A_2＝｛北京，上海｝，R＝｛（北

京，北京），（天津，天津），（上海，广州）}，那么，R在A_1中是自反的，因为，任何城市x只要属于A_1，它就会有（x，x）属于R。但是R在A_2中不是自反的，因为序偶（上海，上海）不是R的分子，尽管上海是A_2的分子。

反自反性定义：如果对于集合A中每个x，都并非xRx，则说关系R在集合A中是反自反的。用符号表示为：

R在A中反自反$\longleftrightarrow$（x）（$x\in A\longrightarrow\neg$（xRx））。

例如，“是父亲”关系在人的集合中是反自反的，因为没有人是他自己的父亲。在实数集中，小于（<）关系是反自反的，因为没有一个数小于它自己。

非自反性定义：对于集合A来讲，存在着x并非具有xRx关系，则称关系R在集合A中是非自反的。用符号表示为：

R在A中非自反$\longleftrightarrow$（$\exists x$）（$x\in A\wedge\neg$（xRx））。

或者说，存在着这样的关系，它在给定的集合A中既不是自反的也不是反自反的。例如“是平方”关系在自然数集合中就是这样，因为有一个自然数是它自己的平方，而其他自然数则不是。

2．对称性，反对称性，斜对称性，非对称性

对称性定义：如果对于集合A中的每个x和y，若xRy则yRx，那么称关系R在集合A中是对称的。用符号表示为：

R在A中对称

$\longleftrightarrow$（x）（y）（$x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\longrightarrow yRx$）。

例如，“是相同颜色”关系在物理对象集合中是对称的。“是亲戚”关系在社会对象集合中是对称的。

反对称性定义：如果对于集合A中的每个x和y，若xRy则并非yRx，那么称关系R在集合A中是反对称的。用符号表示为：

R在A中反对称

$\longleftrightarrow$（x）（y）（$x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\longrightarrow\neg$（yRx））。

例如，“是丈夫”关系在人的集合中就是反对称的。

斜对称性定义：对于集合A中的每个x和y，如果xRy且yRx，那么x＝y，则称关系R在集合A中是斜对称的。用符号表示为：

R在A中斜对称

$\longleftrightarrow (x)(y)(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \longrightarrow x = y)$。

例如关系≥和≤在数的集合中都是斜对称关系。

非对称性定义：对于集合A来讲，存在着x和y具有xRy关系而不具有yRx关系，则称关系R在集合A中是非对称的。用符号表示为：

R在A中非对称

$\longleftrightarrow (\exists x)(\exists y)(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge \neg(yRx))$。

这就是说，有的关系也可能在某集合中既不是对称的，又不是反对称的，也不是斜对称的，比如喜爱关系。

3．传递性，反传递性

传递性定义：对于集合A中每个x，y和z，如果xRy且yRz，则xRz，就称关系R在集合A中是传递的。用符号表示为：

R在A中传递

$\longleftrightarrow (x)(y)(z)(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \longrightarrow xRz)$。

例如，关系＜在数的集合中就是传递的，“年长”关系在人的集合中是传递的。

反传递性定义：对于集合A中每个x，y和z，如果xRy且yRz，则并非xRz，就称关系R在集合A中是反传递的。用符号表示为：

R在A中反传递

$\longleftrightarrow (x)(y)(z)(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \longrightarrow \neg(xRz))$。

例如，“是父亲”关系在人的集合中就是反传递的，因为如果x是y父亲并且y是z的父亲，那么x就不可能是z的父亲。

4．连通性，强连通性，非强连通性

连通性定义：对于集合A中每个x和y，如果$x \neq y$，就有xRy或yRx，则称关系R在集合A中是连通的。用符号表示为：

R在A中连通

$\longleftrightarrow (x)(y)(x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y \longrightarrow xRy \vee yRx)$。

例如，关系$<$和$\leqslant$在数的集合中是连通的。而“是因子”关系在数的集合中、“是母亲”关系在人的集合中就都不是连通的。

强连通性定义：如果对于集合A中每个x和y，总有xRy或yRx，则称关系R在集合A中是强连通的。用符号表示为：

R在A中强连通

$\longleftrightarrow (x)(y)(x \in A \wedge y \in A \longrightarrow xRy \vee yRx)$。

例如，关系$\leqslant$在数的集合中是强连通的，又是连通的。但关系$<$在数的集合中却不是强连通的。因为，任何两个数x和y，或者$x = y$，或者$x < y$，或者$y < x$，也就是说$xRy \vee yRx$成立，所以$\leqslant$强连通。但不见得任何两个数必定$x < y$或$y < x$，也可能$x = y$，所以$<$不强连通。

非强连通定义：

对于集合A来讲，存在着x和y既不具有xRy关系，也不具有yRx关系，则称关系R在集合A中是非强连通的。用符号表示为：

R在A中非强连通

$\longleftrightarrow (\exists_x)(\exists_y)(x \in A \wedge y \in A \wedge \neg(xRy) \wedge \neg(yRx))$。

比如，“是亲戚”关系在人的集合中就是非强通的，因为总有两个人x和y，不仅x对y没有亲戚关系，y对x也没有亲戚关系。

（三）同一关系（等值关系） 同一关系是一种最重要关系，

这种关系在数学中也称作等值关系（或等价关系、相等关系）。关系R是在集合A中等值关系，当且仅当它在A中是自反的、对称的和传递的。例如，同岁关系在人的集合中是等值关系；同颜色关系在物理对象集合中是等值关系。当然，同一关系和等值关系还有细微的差别，在此不作讨论。在数学中常常使用等号“=”表示等值关系。等号“=”的性质可用下述公式来描述：

$$(x)(y)(z)((x=y)\wedge(y=z)\longrightarrow(x=z)),$$

$$(x)(y)((x=y)\longrightarrow(y=x)),$$

$$(x)(x=y)$$

所有这些都是莱布尼茨原则的推论，这个原则是：$x=y$当且仅当x的每个属性都是y的属性，反之亦然。

如果R是在A中等值关系并且$y\in A$，那么这样的集合称作y在A中的R等值类〔y〕R；这个集合使得x属于它，当且仅当$x\in A$并且xRy。于是A的每个元素都严格地属于一个在A中的R关系类。因此，在A中所有R关系的集合是A的划分（分类）。例如，如果R是有相同颜色关系并且A是物理对象的集合，那么在A中R等值类是：红的对象的类，蓝的对象的类，绿的对象的类等等。所有这些类的集合都是物理对象集合在颜色方面的划分。

（四）次序关系

上面我们讨论了二元关系的自反、对称、传递、连通等性质，而且等值关系具有自反、对称、传递三个性质。另外还有几种次序关系也兼有上列几个性质，我们具体讨论如下。

1．拟序：在集合A中的关系R称为A中的拟序，当且仅当R在A中是自反的和传递的。比如集合之间的包含关系⊆就是某个集合的所有子集所组成的集合中的一个拟序，因为⊆在这样集合中既是自反的又是传递的。关系≤是所有实数集合的一个拟序。

2．偏序　关系R是集合A中的偏序，当且仅当R在A中是自

反的、传递的和斜对称的。也就是说，关系R称为A中的一个偏序，若它是集合A中的一个斜对称的拟序。例如，因子关系在自然数集合中是偏序。⊆和≤也都是偏序。

一个有限集合A的一个偏序R，还可以用哈塞图（由数学家H．哈塞构造）来表示。图3—2中小圆圈“○”表示集合A中的元素，如果能从某个圈通过一条连续上升的线直接达到另一个圈，那么就说两个圈之间有R关系。图中用a、b、c代表三个圈，说明具有aRb和cRb。A＝{a b, c}，R＝（a,a），（b,b），（c, c），（a, b），（c, b）}，因而R是A中的偏序。但a与c没有线直接相联，所以没有R关系，即在A中a与c没有关系。

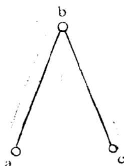


图 3—2



图 3—3

3．全序：关系R是集合A中的全序，当且仅当R在A中是自反的、传递的、斜对称的和连通的。也就是说，A的全序是A的连通的偏序，比如关系≤是所有数的集合的一个全序。图3—3表示一个全序。可以看出，一个全序的哈塞图只是一条上升的线，因此也有称全序为线性序。具体说，关系≤在数的集合中就是全序。

4．严格偏序 关系R是集合A中的严格偏序，当且仅当R在A中是反对称的和传递的。例如“是长者”关系在人的集合中是严格偏序。又如，⊆和≤是偏序，而⊂和＜却是严格偏序。严格偏序的哈塞图与偏序相同，只不过偏序是自反的而严格偏序是反自反的，每一偏序又都对应唯一一个严格偏序。

5. **严格全序** 关系R是集合A中的严格全序，当且仅当R在A中是反对称、传递和连通的。也就是说，A的严格全序是A的连通的严格偏序。例如，关系<是数的集合的严格全序。

6. **弱序** 关系R是集合A的弱序，当且仅当R在A中是传递的和强连通的。例如，“至少一般高”这个关系在人的集合中就是弱序。

我们将以上讲的各种关系总结如下（△表示具有此性质）：

关系性质	等价	拟序	偏序	全序	严格偏序	严格全序	弱序
自　反	△	△	△	△			
对　称	△						
传　递	△	△	△	△	△	△	△
反对称					△	△	
斜对称			△	△			
连　通				△		△	
强连通							△

我们还可以更直观地用图3—4总结如下：

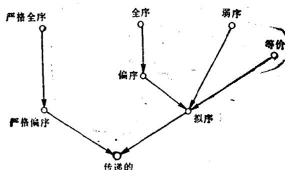


图 3—4

图3—4中的箭号⟶可以看成类似蕴涵号。比如，若是严格全

序，则必定是严格偏序，但是反过来却不成立；，若是严格偏序，则必定是传递的；当然，若是严格全序，则也必定是传递的，即图中表示的关系本身也带有传递性。若全序，则偏序；若偏序，则拟序；若拟序，则传递，等等。很明显，各种关系都带有传递性。

（五）关系运算的展开　关系是一种特殊的集合，因此跟集合运算一样，关系也可以运算。我们设A是任何一个体域，则所谓遍历A中的全关系是指笛卡儿积$A \times A$本身。

1．关系并：若R、Q都是关系，那么$R \cup Q$是由R和Q的并构成的关系，即$x(R \cup Q)y$当且仅当xRy或xQy。用符号表示为：

$$x(R \cup Q)y \longleftrightarrow xRy \vee xQy。$$

或　$$R \cup Q = \{(x, y) \mid xRy \vee xQy\}。$$

例如，设xRy指x是y的老师，xQy指x是y的家长，那么$x(R \cup Q)y \longleftrightarrow$x是y的老师或家长。

2．关系交：若R、Q都是关系，那么$x(R \cap Q)y$当且仅当xRy且xQy。用符号表示为：

$$x(R \cap Q)y \longleftrightarrow xRy \wedge xQy。$$

或　$$R \cap Q = \{(x, y) \mid xRy \wedge xQy\}。$$

例如，我们按上例说，$x(R \cap Q)y \longleftrightarrow$x是y的老师和家长。但是如果我们设xRy指x是y的祖父，xQy指x是y的妹妹，那么$x(R \cap Q)y$就成了x是y的祖父和妹妹，这是不成立的。这时，$x(R \cap Q)y$是一种空关系（即空集Φ）。

3．关系差：若R、Q都是关系，那么$x(R \sim Q)y$当且仅当xRy且$\neg(xQy)$。用符号表示为：

$$x(R \sim Q)y \longleftrightarrow xRy \wedge \neg(xQy)。$$

或　$$R \sim Q = \{(x, y) \mid xRy \wedge \neg(xQy)\}。$$

例如，设xRy指x是y的同学，xQy指x是y的朋友，那么$x(R \sim$

Q）y$\longleftrightarrow$x是y的同学但不是朋友。

4.关系逆：一个关系的逆关系（用符号表示为$\overline{R}$）是指：对于所有的x和y，$x\overline{R}y$当且仅当yRx。用符号表示为：

$$x\overline{R}y \longleftrightarrow yRx。$$

或 $$\overline{R} \longleftrightarrow \{(x, y) \mid yRx\}。$$

例如，设xRy指x是y的父亲，那么$x\overline{R}y \longleftrightarrow$y是x的父亲。

再如，设R＝{（2，4），（6，8），（10，12）}，那么$\overline{R}$＝{（4，2），（8，6），（12，10）}。就是说，把构成原关系的所有序偶的次序倒过来就构成了相应的逆关系。

5.相对积：如果R和Q都是二项关系，R和Q的相对积（用符号表示为R/Q）是这样一种关系：它在x和y之间成立，当且仅当存在一个z，使得R在x和z之间成立且Q在z和y之间成立。用符号表示为：

$$x(R/Q)y \longleftrightarrow (\exists z)(xRz \wedge zQy)。$$

或 R/Q＝{（x，y）｜存在一个z，使得xRz且zQy}。

例如，设xRz表示x是z的父亲，xQy表示z是y的母亲，那么x（R/Q）y表示x是y的外祖父。再如，xRy表示x是y的父母，xQy表示x是y的姐妹，那么x（Q/R）y表示：存在一个z，x为z的姐妹且z是y的父母，因此x是y的姑姨。Q/R在此表示姨侄关系。一般地说，Q/R不同于R/Q。

第二节 谓词逻辑的演算系统

按照一定规则（包括形成规则和推理规则，而这些规则时常不是任意制定，它们是对日常推理规律的高度抽象，而日常推理规律又是对客观世界规律的某种反映），将所有有效的谓词公式

联结成一个逻辑序列，并逐一加以严格证明，这就构成了谓词逻辑的演算系统。当然，这个系统是在前述命题演算系统的基础上展开的，所以也可以把两个系统联结起来统称为谓词演算系统。

一、系统特点

谓词演算就是要对简单命题“打开”加以分析，找到其主词、谓词和量词（全称、特称），分析它们的形式结构，研究这些结构的特征以及彼此之间的关系，从而推导出它们的正确形式和规律。在谓词演算中不仅有命题变项，而且还有个体变项和谓词变项。那么，命题演算是怎样过渡到谓词演算的呢？它们之间的关系怎样呢？看下面的例子：

（1）3是奇数；

（2）$3<4$；

（3）$3+4=7$。

这三个命题分别表明一个对象（如（1））、两个对象（如（2））和三个对象（如（3））都具有某一属性，或具有某一关系。我们称这些对象为个体。如果把这三个命题中的个体全部或部分地换成变项（其变域是自然数），那么就成为：

（1）′x是奇数；

（2）′$x<4$，或$3<y$，或$x<y$；

（3）′$x+4=7$，或$x+y=7$，或$x+y=z$。

这些就都不是命题了，因为它们都含有变项．它们没有真假值。它们都是命题函项（或命题形式），即当以个体（自然数）代入其中的变项时，就能得到命题，就有了真假值。真假值就是命题函项的两个可能的值。如果对命题函项中的变项加上量词，如“所有x”、“有的x”、“所有y”、“有的y”等，于是上述命题就可写作：

（1）″①所有x，x是奇数；

②有的x，x是奇数；

（2）″ ①所有x，所有y，$x<y$；

②有的x，有的y，$x<y$；

……

这些又都成了命题，都有了真假值。就是说，真假值对于命题来讲是确定的，即某一命题必定是或真或假。但是真假值对于命题函项来讲却不是确定的，而是两种可能的。谓词演算正是研究命题和命题函项经过使用联结词和量词构成更复杂的命题，以及这样构成的复杂命题之间的推理关系。谓词演算是以命题演算为基础的，它包括命题演算。

对于谓词和量词我们讲得比较多了；这里再讲一下变项和自由与约束的问题。

（一）变项　变项在人类思维中起着极为重要的作用，这一点在逻辑学和数学中更为明显。其主要作用可以指出三点：

1.表示形式或结构。例如，“如果p那么q”就是表示一种命题形式。

2.表示相同或相异。在比较下列两个形式，“如果p那么q”和“如果q那么p”，可以看出前者中居前的变项与后者中居后的变项相同；前者中居后的变项与后者中居前的变项相同。而前者中两个变项相异，后者中两个变项也相异。在一个命题形式中，以变项的值来代入变项时，相同的变项必须代之以相同的值，不同的变项一般地代之以不同的值。但不同的变项也可以代之以相同的值，这是因为变项虽然不同，但它们的变域可以是相同的。这里的变项“p”和“q”是不同的变项，但其变域相同，所以它们可取相同的值。

3.反映普遍性、规律性。例如，在数学里有：$x+y=y+x$。这里的“x”和“y”都是变项，一般地代表任意的实数。上述公式反映了实数的加法的交换律。在逻辑学里，运用变项也可以反

映普遍性、规律性。例如，公式（x）（F（x）⟶G（x））反映了所有全称命题的主词和谓词之间具有蕴涵关系；而公式（$\exists$x）（F（x）∧G（x））反映了所有存在命题的主词和谓词之间具有合取关系。

（二）自由变项和约束变项　不受量词限制的个体变项称作自由变项。例如，

例1.x是偶数。

这是一个命题函项，而不是一个命题，其中有变项x，由于x值未定，所以例一既不真也不假，只是具有真假两种可能性。如果x取值2，我们说“2是偶数”，这是一个真命题；如果x取值3，我们说“3是偶数”，这是一个假命题。

例2.x<y。

这也是一个命题函项，而不是一个命题，其中有变项x和y，由于它们的值都不固定，所以不能断定其真假。在例一和例二中，x和y都是变项，它们的论域（变化范围）虽然已经确定，但是它们的具体值未定，当我们以特定的值代入以后，就可以得到一个命题，因此这样的变项是自由变项。

受到量词限制的个体变项称作约束变项。例如，

例3.（x）（x是发展变化的）

这是一个命题，而不是命题函项，因为对其中的个体变项不需要再作代入，它的含义就已经非常清楚了，它断定“所有事物都是发展变化的”。这是一个真命题。反过来，（x）（x是无机物）则断定了“所有事物都是无机物”，其含义也是非常清楚的，它是一个假命题。

例4.（$\exists$x）（x在北京工作∧x是干部∧x是业余作家）

它断定了“有在北京工作的干部是业余作家”。这是一个真命题。反过来，（$\exists$x）（x在北京工作∧x是干部∧x是宇航员）则断定了“有在北京工作的干部是宇航员”，其含义是非常清楚

的，但却是一个假命题，因为直到目前中国还没有宇航员。

例3和例4都是真假值非常确定（或者说含义非常确定）的命题，它们包含的个体变项都是约束变项；而例一和例二都是真假值不确定（或者说真假值只是两种可能，或者说含义不确定）的命题函项，它们包含的个体变项都是自由变项。约束变项之所以不需要代入，是因为变项的论域确定以后它的意义就随之确定了。约束变项是被量词所限制或约束了的变项。量词内的变项也被此量词所限制，也称作约束变项。

二、公理推理系统

与前述命题演算的公理推理系统相比，谓词演算的公理推理系统要复杂一些。谓词演算的公理推理系统就是把谓词逻辑形式化和公理化，构成一个完整的形式化公理系统，即谓词演算系统。我们知道，谓词逻辑包括广义和狭义之分，相应的，谓词演算也包括广义和狭义之分。狭义谓词演算中量词符号只用于个体变项，而广义谓词演算中量词符号则全面用于个体变项、命题变项和谓词变项。在谓词演算中最基础的部分是狭谓词演算。

（一）普通系统　谓词演算的公理推理系统有很多，我们先介绍一种常见的普通系统。

系统的出发点：

1．初始符号

（1）变项符号

①命题变项：p，q，r，s，p_1…。

②个体变项：x，y，z，u，v，w，x_1…。

③谓词变项：F，G，H，P，Q，R，S，F_1，…。

（2）常项符号

①联结词：¬，∨。

②量词：（…），（∃…）。

（3）辅助符号：括号和逗点（，）。

（4）语法符号

①μ，（代表命题变项）。

②θ，（代表个体变项）。

③Ω，（代表谓词变项）。

④X，Y，Z（代表符号序列）。

⑤A，B，C，D，E（代表合式公式）。

2.形成规则

（1）一命题变项μ是一合式公式。如p，q等。

（2）一谓词变项Ω后继有写在一对括号内并用逗号分开的个体变项，组成的是一合式公式。如P（x），R(x，y，z等。

（3）如X是合式公式，则¬X是合式公式。如¬P，¬P(x等。

（4）如X和Y是合式公式，并且无一个体变项θ在二者之一中是约束的但在另一个中是自由的，则（X∨Y）是合式公式。如（x）P（x）∨R（y，z）等。

（5）如X为一合式公式并且θ在其中是自由的，则（θ）X和（$\exists\theta$）X为合式公式。如（x）R（x，y）等。

（6）只有适合以上各条的是合式公式。

这6条形成规则中除（4），（5）两条外，跟命题演算中的形成规则相近，只是（4），（5）两条涉及量词的约束变项问题，在此多作些说明。

（4）条中排除了这样的情况：（x）P（x)∨R（x，y）。个体变项x在前半部分里是约束变项，而在后半部分里却是自由变项，这种情况不能组成合式公式，就是说，是不允许的。(5）条中排除了空约束，例如（x）F（y）是不能允许的。也排除了重复约束，例如（x）（x）F（x）也是不能允许的。综合上述

情况，当然$(x)((x)F(x)\vee G(x))$的形式明显不是合式公式，因为它既违反（4）又违反（5）。

3.定义（我们用D表示定义）

（1）D_1：$(A\longrightarrow B)=_{Df}(\neg A\vee B)$。（蕴涵定义）

（2）D_2：$(A\wedge B)=_{Df}\neg(\neg A\vee\neg B)$。（合取定义）

（3）D_3：$(A\longleftrightarrow B)=_{Df}(A\longrightarrow B)\wedge(B\longrightarrow A)$，

$=_{Df}(\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A)$。（等值定义）

4.公理（我们用A表示公理）

（1）A_1：$(p\vee p)\longrightarrow p$。（重言律，或去析公理）

（2）A_2：$p\longrightarrow(p\vee q)$。（析取引入律，或加析公理）

（3）A_3：$(p\vee q)\longrightarrow(q\vee p)$。（析取交换律，或交析公理）

（4）A_4：$(q\longrightarrow r)\longrightarrow((p\vee q)\longrightarrow(p\vee r))$。（附加律，或蕴析公理）

（5）A_5：$(x)F(x)\longrightarrow F(y)$。（全称列举律，或列举公理）

（6）A_6：$F(y)\longrightarrow(\exists x)F(x)$。（列举存在律，或存在公理）

前4条公理跟命题演算的公理推理系统一样，只是后两条公理是新增加的。公理（5）是关于全称量词的，它说：如果一切个体都是F，那么某一特定个体也是F。例如：如果一切事物都是包含着矛盾的，那么社会主义社会就是包含着矛盾的。这是“从一般到个别”的推理。

公理（6）是关于存在量词的，它是说：如果某一特定的个体y是F，那么就存在一个个体x是F。例如：如果《易经》是二进制计数，那么中国在远古时代就存在了二进制计数。这是“从个别到存在”的推理。

5.推理规则（或变形规则，我们用R表示）

（1）R_1：（代入规则）谓词演算共有三种变项，因此也有三条代入规则。这里首先要强调两点：第一，对一合式公式作代入后必须还是一合式公式，如果不加限制就会违反这一要求。第二，从一普遍有效式出发作代入后必须还是一普遍有效式。因为谓词公式比命题公式要更复杂，如果不加限制，很可能通过代入所得公式不是普遍有效式。这也就是确立代入规则或其他推理规则的主要原因。

①R_{1-1}（命题变项代入规则） 在公式A中出现的命题变项μ可由另一公式B代入，代入必须在μ出现的一切位置上进行。这情况可以写作：

如果A（μ），那么A（μ/B）。

其中的A（μ）表示公式A中有命题变项μ；A（μ/B）表示对A中的所有μ都代之以B。对B的要求是：第一，如果个体θ在A中是自由变项，那么B中不得含有约束变项θ，就是说，个体θ在A，B中要是自由的必须统一自由；第二，如果个体θ在A中是约束变项，那么B中不得含有自由变项θ，就是说，个体θ在A，B中要是约束的必须统一约束；第三，如果个体θ在A中是约束变项并且μ又在（θ）或（$\exists_\theta$）的辖域中，那么B中不得有约束变项θ。上述三条都是为了保障代入进行后仍为合式公式或普遍有效式，违反这些要求就会出问题。

违反第一条，其结果不合式。如：

$A(\mu)$：$p \longrightarrow p \vee F(x)$，

B：$(x)G(x)$，

$A(\mu/B)$：$(x)G(x) \longrightarrow (x)G(x) \vee F(x)$。

违反第二条，其结果不合式。如：

$A(\mu)$：$(x)(F(x) \vee p) \longrightarrow (x)F(x) \vee p$，

B：$G(x)$，

$A(\mu/B)$：$(x)(F(x)\vee G(x))\longrightarrow(x)F(x)$
$\vee G(x)$。

违反第三条，其结果不合式。如：

$A(\mu)$：$(x)(F(x)\vee p)\longrightarrow(x)F(x)\vee p$，

B：$(x)G(x)$，

$A(\mu/B)$：$(x)(F(x)\vee(x)G(x))\longrightarrow$
$(x)F(x)\vee(x)G(x)$。

违反第二条，其结果失掉普遍有效性。如：

$A(\mu)$：$p\longrightarrow(\exists x)((F(x)\vee\neg F(x))\wedge p)$，

B：$G(x)$，

$A(\mu/B)$：$G(x)\longrightarrow(\exists x)((F(x)\vee\neg F(x))$
$\wedge G(x))$，$G(x)\longrightarrow(\exists x)G(x)$。

②R_{1-2}（自由个体变项代入规则） 在公式A中出现的自由个体变项θ，可由另一个体变项θ'代入。其要求是：代入必须在θ出现的一切位置上进行，并且θ'在A中不作为约束变项出现，也就是说，θ'在A中必须全部是自由的。这情况可以写作：

如果$A(\theta)$，那么$A(\theta/\theta')$。

违反这一条，其结果不合式。如：

$A(\theta)$：$(x)F(x)\longrightarrow F(y)$，

θ'：x，

$A(\theta/\theta')$：$(x)F(x)\longrightarrow F(x)$。

违反这一条，其结果会失掉普遍有效性。如：

$A(\theta)$：$(x)(\exists y)R(x, y)\longrightarrow(\exists y)R(z, y)$，

θ'：y，

$A(\theta/\theta')$：$(x)(\exists y)R(x, y)\longrightarrow$
$(\exists y)R(y, y)$。

③R_{1-3}（谓词变项代入规则） 一公式A中的n元谓词变项

$\Omega(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$可处处代之以一复合谓词$B(\theta_1, \cdots, \theta_n; \theta_{n+1}, \cdots, \theta_{n+m})$ ($m \geq 0$)。这情况可写作：

如果$A(\Omega(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n))$，

那么$A(\Omega(\theta_1, \cdots, \theta_n)/B(\theta_1, \cdots, \theta_n; \theta_{n+1}, \cdots, \theta_{n+m}))$。

谓词代入要遵守下列要求：第一，代入的结果必须是合式的；第二，A中的自由个体变项在代入后不得为B中的量词所约束；第三，如果$m>0$，$B(\theta_1, \cdots, \theta_n; \theta_{n+1}, \cdots, \theta_{n+m})$中的变项$\theta_{n+1}, \cdots, \theta_{n+m}$等在代入后不得为A中原有的量词所约束。违反这些要求就会出现问题。

违反第一条，代入结果不合式的：

$A(\Omega(\cdots))$：$F(x) \longrightarrow F(x) \vee (y)G(y)$，

$B(\cdots)$：$R(\theta, y)$

$A(\Omega/B)$：$R(x, y) \longrightarrow R(x, y) \vee (y)G(y)$。

"y"在公式中既约束又自由。违反了第一条要求。

违反第二条，代入结果失掉普遍有效性的：

$A(\Omega(\cdots))$：$(x)F(x) \longrightarrow F(y)$，

$B(\cdots)$：$(\exists y)R(\theta, y)$

$A(\Omega/B)$：$(x)(\exists y)R(x, y) \longrightarrow (\exists y)R(y, y)$。

结果不普遍有效。由于原公式中的自由变项y，在代入后为代入谓词$(\exists y)R(\theta, y)$中的量词所约束，违反了第二条要求。

违反第三条，代入结果失掉普遍有效性的：

$A(\Omega(\cdots))$：$(x)F(x) \longrightarrow (x)(F(y) \wedge G(x) \vee \neg G(x))$，

$B(\cdots)$：$R(x, \theta)$，

$A(\Omega/B)$：$(x)R(x, x) \longrightarrow (x)R(x, y)$。

结果不普遍有效。由于$R(x, \theta)$中θ以外的变项x在代入后为原公式的量词所约束，违反了第三条要求。

（2）R_2（分离规则）

从A和A⟶B，可得B。

（3）R_3（前存后概规则，也称量词推演规则）

①R_{3-1}（前件存在规则）如果θ在B中不出现，从A（θ）⟶B可得（∃θ）A（θ）⟶B。

②R_{3-2}（后件概括规则）如果θ在A中不出现，从A⟶B（θ）可得A⟶（θ）B（θ）。

（4）R_4（置换规则）

①R_{4-1}（约束个体变项易字规则）公式A中的一约束个体变项θ，可由另一个体变项θ'置换。这情况可写作：

如果A（θ），那么A（θ/θ'）。

在这里，置换必须在一特定量词及其辖域内到处实现。如θ在多个量词内出现，置换可以只在一量词及其辖域内进行。置换的要求是：第一，θ'在A中不能作自由变项出现；第二，如果θ'在A中约束，那么被置换的θ不能在θ'的辖域中出现。违反这些要求就会出现问题。

违反第一条，置换结果不合式。如：

A（θ）：（x）F（x）⟶F（y），

θ'：y，

A（θ/θ'）：（y）F（y）⟶F（y）。

不合式的原因在于违反了第一条要求，因此造成“y”在公式中既有约束又有自由。

违反第一条，置换结果失掉普遍有效性。如：

A（θ）：（x）（$∃_y$）R（x，y）⟶（$∃_z$）R(u，z)，

θ'：u，

A（θ/θ'）：（x）（$∃_y$）R（x，y）⟶（$∃_u$）R（u，u）。

失掉普遍有效性的原因在于置换约束了原公式的一个自由变项，

违反了第一条的要求。

违反第二条，置换结果不合式。如：

$A(\theta)$：$(x)(F(x)\wedge(\exists_y)G(y))$

$\longrightarrow(x)F(x)\wedge(\exists_y)G(y)$，

θ'：x，

$A(\theta/\theta')$：$(x)(F(x)\wedge(\exists_x)G(x))$

$\longrightarrow(x)F(x)\wedge(\exists_y)G(y)$。

蕴涵式左方不合式，因为违反了第二条要求。

②R_{4-2}（定义置换规则） 定义的左右两方可以互相置换，其结果真假值不变。

6.导出规则（我们用R导表示）

上述推理规则是谓词演算公理系统中的基本推理规则，它决定着推理系统能否得以展开。导出规则虽然也是推理规则，但它只是上述基本推理规则的合理补充。如果没有导出规则，只按照上述推理规则进行推理证明，那么整个系统也可以展开下去，但是繁琐很多。导出规则一般都是直观性较强的推理规则，它可以大大简化推理证明。

我们知道，命题演算是谓词演算的一个子系统，命题演算的出发点是谓词演算出发点的一部分。因此，命题演算的定理也可以看作是谓词演算的既成定理。至于导出规则（这是一种语法规则或语形规则），命题演算中的导出规则一般的都可以在谓词演算中继续使用，但是有的需要扩展说明以适应谓词演算的需要。谓词演算本身也有独具的导出规则。我们列举如下：

（1）R导$_1$（析取交换规则） 从$A\vee B$可直接推出$B\vee A$。（可以继续使用）

（2）R导$_2$（附加规则） 从$B\longrightarrow C$可直接推出$A\vee B\longrightarrow A\vee C$。（可以继续使用）

（3）R导$_3$（三段论规则） 从$B\longrightarrow C$和$A\longrightarrow B$，可直接

推出$A \longrightarrow C$。（可以继续使用）

（4）R导$_4$（假言易位规则） 从$A \longrightarrow B$可直接推出$\neg B \longrightarrow \neg A$。（可以继续使用）

（5）R导$_5$（基本置换规则） （需要扩展说明）

（6）R导$_6$（等值构成规则） 从$A \longrightarrow B$和$B \longrightarrow A$，可得$A \longleftrightarrow B$。（可以继续使用）

（7）R导$_7$（求否定规则，需要扩展说明）

（8）R导$_8$（对偶规则，需要扩展说明）

（9）R导$_9$（概括规则，独具导出规则）

下面仅就（5）、（7）、（8）、（9）进行若干独立的阐释和证明，这种证明称作语法或语形证明。

关于R导$_5$（谓词演算的基本置换规则）

设：①$A(\theta_1, \cdots, \theta_n)$和$B(\theta_1, \cdots, \theta_n)$是谓词演算的两个公式，其中除$\theta_1, \cdots, \theta_n$之外没有其他自由个体变项；②$\phi(A)$是谓词演算的一个合式公式，以B置换$\phi(A)$中的A得$\phi(B)$，$\phi(B)$仍是一个合式公式。就是说，

如果$A(\theta_1, \cdots, \theta_n) \longleftrightarrow B(\theta_1, \cdots, \theta_n)$，

那么$\phi(A) \longleftrightarrow \phi(B)$。

证明：如果$\phi(A)$是一合式公式，并且简单地说假设A在$\phi(A)$中只出现一次，那么$\phi(A)$的可能形式有：①$\neg A$；②$C \vee A$；③$A \vee C$；④$(\theta_1)A(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$；⑤$(\exists\theta_1)A(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$。前三种情况是命题演算中基本置换规则的简单推广。把原证明中的A，B，C等理解为谓词演算的公式，证明仍然可以成立。只有后两种情况才需要进一步证明。具体证明从略。

关于R导$_7$（谓词演算的求否定规则）

设：C是谓词演算的公式，在其中没有$\longrightarrow$和$\longleftrightarrow$出现，C的否定式$\overline{C}$可用以下方法直接求得：①$\vee$被代以$\wedge$；②$\wedge$被代以

$\vee$；③（θ）被代以（$\exists_\theta$）；④（$\exists_\theta$）被代以（θ）；⑤$\neg\mu$被代以μ；⑥$\neg\Omega(\theta_1, \cdots, \theta_n)$被代以$\Omega(\theta_1, \cdots, \theta_n)$；⑦不出现于部分合式公式$\neg\mu$中的$\mu$被代以$\neg\mu$。不出现于部分合式公式$\neg\Omega$中的$\Omega(\theta_1, \cdots, \theta_n)$被代以$\neg\Omega(\theta_1, \cdots, \theta_n)$。

证明：C的可能形式共有以下六种：①μ或$\Omega(\theta_1, \cdots, \theta_n)$；②$\neg A$；③$A \vee B$；④$A \wedge B$；⑤（$\theta$）A（$\theta$）；⑥（$\exists_\theta$）A（$\theta$）。求前四种形式的否定式，其方法和根据与命题演算中是相同的。只是后两种形式需要进一步证明。在此从略。

关于R导$_8$（对偶规则）

设：A和B是谓词演算的两个公式，$\widetilde{A}$和$\widetilde{B}$是在A和B中进行如下变换的结果：①把$\vee$和$\wedge$互换；②把（θ）和（$\exists_\theta$）互换。于是有如下推理：①如$A \longrightarrow B$是重言式，从$A \longrightarrow B$可得$\widetilde{B} \longrightarrow \widetilde{A}$；②如$A \longleftrightarrow B$是重言式，从$A \longleftrightarrow B$可得$\widetilde{A} \longleftrightarrow \widetilde{B}$。

必须看到，求否定的$\overline{A}$和$\overline{B}$与求对偶的$\widetilde{A}$和$\widetilde{B}$是有同有异的。其相同点在于：都将A和B中的$\vee$和$\wedge$、（θ）和（$\exists_\theta$）互换。其不同点在于：A和B中的命题变项μ和谓词变项$\Omega(\theta_1, \cdots, \theta_n)$，在$\overline{A}$和$\overline{B}$中要真假互变，而在$\widetilde{A}$和$\widetilde{B}$中却完全不变。具体证明从略。

关于R导$_9$（概括规则）

从A（x），其中x自由出现，可得（x）A（x）。

证明：如果A（x）是已证公式，并且其中的x自由出现。据命题演算定理T_{41} $p \longrightarrow (q \longrightarrow p)$作代入可得谓词演算公式。具体证明：

① A（x）　（已知）

② $A(x) \longrightarrow (p \vee \neg p \longrightarrow A(x))$　（T_{41}代入）

③ $p \vee \neg p \longrightarrow A(x)$（①，②分离）

④ $p \vee \neg p \longrightarrow (x)A(x)$　（③后件概括）

⑤ $p \vee \neg p$　（已知永真）

⑥ $(x)A(x)$ （⑤，④分离）（证毕）

根据这条规则，我们可以把一个已知公式里的自由个体变项用全称量词约束起来，因此这条规则称为"概括规则"。

系统的定理推演

在前面系统出发点的基础上，下面要展开系统的定理证明。定理都是普遍有效公式（相当于命题演算中的重言式或永真公式）。虽然命题演算是谓词演算的一个子系统，但是在公理系统上它们还是有所区分的。我们对命题演算和谓词演算中的定理都用T表示，只不过命题演算中比如T_1表示定理1，而谓词演算中则比如T_{-1}：表示定理1。

T_{-1}：$(x)(F(x)\vee\neg F(x))$

这是谓词逻辑中所表现的排中律，是说：对于一切x来说，x或是F或是非F。

证明：

① $p\vee\neg p$ （T4）

② $F(x)\vee\neg F(x)$ （R_{1-1}，$p/F(x)$）

③ $p\rightarrow(q\rightarrow p)$ （T_{41}）

④ $F(x)\vee\neg F(x)\rightarrow(p\vee\neg p\rightarrow F(x)\vee\neg F(x))$

（R_{1-1}，$p/F(x)\vee\neg F(x)$，$q/p\vee\neg p$）

⑤ $p\vee\neg p\rightarrow F(x)\vee\neg F(x)$ （R_2）

⑥ $p\vee\neg p\rightarrow(x)(F(x)\vee\neg F(x))$ （R_{3-2}）

⑦ $(x)(F(x)\vee\neg F(x))$ （R2） （证毕）

$T\text{-}2$：$(x)F(x)\rightarrow(\exists x)F_{(x)}$

它是说：如果所有个体x都是F，那么就有个体x是F。它说明全称蕴涵存在。

证明：

① $(x)F_{x}\rightarrow F_{(y)}$ （A_5）

② $F_{(y)}\rightarrow(\exists x)F_{(x)}$ （A_6）

③ $(x)F(x) \longrightarrow (\exists x)F(x)$ （①，②R导3）（证毕）

T-3：$(x)(F(x)\wedge G(x)) \longrightarrow (x)F(x)\wedge (x)G(x)$

T-4：$(x)F(x)\wedge (x)G(x) \longrightarrow (x)(F(x)\wedge G(x))$

T-5：$(x)(F(x)\wedge G(x)) \longleftrightarrow (x)F(x)\wedge (x)G(x)$

这三条定理都是表明全称量词对合取的分配律。

证明（T_{-3}）：

① $(x)F(x) \longrightarrow F(y)$ （A_5）

② $(x)(F(x)\wedge G(x)) \longrightarrow F(y)\wedge G(y)$

（R_{1-3}，$F(\theta)/F(\theta)\wedge G(\theta)$）

③ $F(y)\wedge G(y) \longrightarrow F(y)$ （T_{14}）

④ $(x)(F(x)\wedge G(x)) \longrightarrow F(y)$ （R导$_3$）

⑤ $\longrightarrow (y)F(y)$ （R_{3-2}）

⑥ $\longrightarrow (x)F(x)$ （R_{4-1}）

⑦ $F(y)\wedge G(y) \longrightarrow G(y)$ （T_{15}）

⑧ $(x)(F(x)\wedge G(x)) \longrightarrow G(y)$ （R导$_3$）

⑨ $\longrightarrow (y)G(y)$ （R_{3-2}）

⑩ $\longrightarrow (x)G(x)$ （R_{4-1}）

⑪ $(x)(F(x)\wedge G(x)) \longrightarrow (x)F(x)\wedge (x)G(x)$

（T_{31}）（证毕）

证明（T_{-4}）：

① $(x)F(x) \longrightarrow F(y)$ （A_5）

② $(x)G(x) \longrightarrow G(y)$ （R_{1-3}）

③ $(x)F(x)\wedge (x)G(x) \longrightarrow F(y)\wedge G(y)$ （T_{31}）

④ $\longrightarrow (y)(F(y)\wedge G(y))$ （R_{3-2}）

⑤ $\longrightarrow (x)(F(x)\wedge G(x))$ （R_{4-1}）

（证毕）

证明（T_{-5}）：据T_{-3}和T_{-4}得证。

T_{-6}：$(x)(F(x) \longrightarrow G(x)) \longrightarrow ((x)F(x) \longrightarrow (x)G(x))$

这是全称对蕴涵的分配律。其逆命题并不成立。

证明：

① $(x)F(x) \longrightarrow F(y)$ （A_5）

② $(x)(F(x) \longrightarrow G(x)) \longrightarrow (F(y) \longrightarrow G(y))$

（R_{1-3}）

③ $F(y) \longrightarrow ((x)(F(x) \longrightarrow G(x)) \longrightarrow G(y))$ （T_{22}）

④ $(x)F(x) \longrightarrow ((x)(F(x) \longrightarrow G(x)) \longrightarrow G(y))$

（R导$_3$）

⑤ $(x)F(x) \wedge (x)(F(x) \longrightarrow G(x)) \longrightarrow G(y)$ （T_{23}）

⑥ $\longrightarrow (y)G(y)$ （R_{3-2}）

⑦ $\longrightarrow (x)G(x)$ （R_{4-1}）

⑧ $(x)(F(x) \longrightarrow G(x)) \longrightarrow ((x)F(x) \longrightarrow (x)G(x))$

（T_{24}） （证毕）

T_{-7}: $(x)(F(x) \longleftrightarrow G(x)) \longrightarrow ((x)F(x) \longleftrightarrow (x)G(x))$

这是全称对蕴涵的分配律。其逆命题也不成立。

证明：

① $(x)(F(x) \wedge G(x)) \longrightarrow (x)F(x) \wedge (x)G(x)$

（T_{-5}）

② $(x)((F(x) \longrightarrow G(x)) \wedge (G(x) \longrightarrow F(x))) \longrightarrow (x)(F(x) \longrightarrow G(x)) \wedge (x)(G(x) \longrightarrow F(x))$ （R_{1-3}）

③ $(x)(F(x) \longleftrightarrow G(x)) \longrightarrow (x)(F(x) \longrightarrow G(x)) \wedge (x)(G(x) \longrightarrow F(x))$ （D_3）

④ … $\longrightarrow (x)(F(x) \longrightarrow G(x))$ （T_{14}）

⑤ … $\longrightarrow ((x)F(x) \longrightarrow (x)G(x))$ （T_{-6}）

⑥ … $\longrightarrow (x)(G(x) \longrightarrow F(x))$ （T_{15}）

⑦ … $\longrightarrow ((x)G(x) \longrightarrow (x)F(x))$ （T_{-6}）

⑧ $(x)(F(x)\longleftrightarrow G(x))\longrightarrow((x)F(x)\longrightarrow(x)G(x))$
$\wedge((x)G(x)\longrightarrow(x)F(x))$ （T_{31}）

⑨ $(x)(F(x)\longleftrightarrow G(x))\longrightarrow((x)F(x)\longleftrightarrow(x)G(x))$
（D_3） （证毕）

T_{-8}：$(x)F(x)\vee(x)G(x)\longrightarrow(x)(F(x)\vee G(x))$
这一条表明全称对于析取可以提取，但不能分配，即逆命题并不成立。

证明：

① $F(x)\longrightarrow F(x)\vee G(x)$ （A_2）

② $(x)(F(x)\longrightarrow F(x)\vee G(x))$ （R导$_9$）

③ $(x)F(x)\longrightarrow(x)(F(x)\vee G(x))$ （T_{-6}）

④ $G(x)\longrightarrow F(x)\vee G(x)$ （T_{10}）

⑤ $(x)(G(x)\longrightarrow F(x)\vee G(x))$ （R导$_9$）

⑥ $(x)G(x)\longrightarrow(x)(F(x)\vee G(x))$ （T_{-6}）

⑦ $(x)F(x)\vee(x)G(x)\longrightarrow x(F(x)\vee G(x))$ （T_{31}）

（证毕）

T_{-9}：$(\exists_x)F(x)\longleftrightarrow\neg(x)\neg F(x)$

T_{-10}：$(\exists_x)\neg F(x)\longleftrightarrow\neg(x)F(x)$

T_{-11}：$\neg(\exists_x)\neg F(x)\longleftrightarrow(x)F(x)$

T_{-12}：$\neg(\exists_x)F(x)\longleftrightarrow(x)\neg F(x)$

这4条定理表明全称与特称的换算关系。

证明（T_{-9}）：

（先证左侧蕴涵右侧）

① $(x)F(x)\longrightarrow F(y)$ （A_5）

② $(x)\neg F(x)\longrightarrow\neg F(y)$ （R_{1-3}）

③ $\neg\neg F(y)\longrightarrow\neg(x)\neg F(x)$ （T_7）

④ $F(y)\longrightarrow\neg\neg F(y)$ （T_5）

⑤ $F(y)\longrightarrow\neg(x)\neg F(x)$ （R导$_3$）

⑥ $(\exists_y)F(y) \longrightarrow \neg(x)\neg F(x)$ (R_{3-1})

⑦ $(\exists_x)F(x) \longrightarrow \neg(x)\neg F(x)$ (R_{4-1})

（再证右侧蕴涵左侧）

⑧ $F(y) \longrightarrow (\exists x)F(x)$ (A_6)

⑨ $\neg(\exists_x)F(x) \longrightarrow \neg F(y)$ (T_7)

⑩ $\neg(\exists_x)F(x) \longrightarrow (y)\neg F(y)$ (R_{3-2})

⑪ $\neg(\exists_x)F(x) \longrightarrow (x)\neg F(x)$ (R_{4-1})

⑫ $\neg(x)\neg F(x) \longrightarrow \neg\neg(\exists x)F(x)$ (T_7)

⑬ $\neg(x)\neg F(x) \longrightarrow (\exists_x)F(x)$ (T_6)

⑭ $(\exists_x)F(x) \longleftrightarrow \neg(x)\neg F(x)$ (D_3)

（证毕）

证明（T_{-10}）：

① $p \longleftrightarrow \neg\neg p$ (T_{32})

② $F(x) \longleftrightarrow \neg\neg F(x)$ (R_{1-1})

③ $(x)(F(x) \longleftrightarrow \neg\neg F(x))$ （R导$_9$）

④ $(x)F(x) \longleftrightarrow (x)\neg\neg F(x)$ (T_{-7})

⑤ $\neg(x)F(x) \longleftrightarrow \neg(x)\neg\neg F(x)$ (T_{38})

⑥ $(\exists_x)F(x) \longleftrightarrow \neg(x)\neg F(x)$ (T_{-9})

⑦ $(\exists_x)\neg F(x) \longleftrightarrow \neg(x)\neg\neg F(x)$ (R_{1-3})

⑧ $(\exists_x)\neg F(x) \longleftrightarrow \neg(x)F(x)$ （R导3） （证毕）

证明（T_{-11}）：

① $(\exists_x)\neg F(x) \longleftrightarrow \neg(x)F(x)$ (T_{-10})

② $\neg(\exists_x)\neg F(x) \longleftrightarrow \neg\neg(x)F(x)$ (T_{38})

③ $\neg(\exists_x)\neg F(x) \longleftrightarrow (x)F(x)$ (T_{32}) （证毕）

证明（T_{-12}）：

① $(\exists_x)F(x) \longleftrightarrow \neg(x)\neg F(x)$ (T_{-9})

② $\neg(\exists_x)F(x) \longleftrightarrow \neg\neg(x)\neg F(x)$ (T_{38})

③ $\neg(\exists_x)F(x) \longleftrightarrow (x)\neg F(x)$ (T_{32}) （证毕）

T_{-13}: $(x)(F(x)\longrightarrow G(x))\longrightarrow((\exists_x)F(x)\longrightarrow(\exists_x)G(x))$

这是说：如果所有F都是G，那么存在F就存在G。

证明：

① $(F(x)\longrightarrow G(x))\longrightarrow(\neg G(x)\longrightarrow\neg F(x))$ (T_7)

② $(x)((F(x)\longrightarrow G(x))\longrightarrow(\neg G(x)\longrightarrow\neg F(x)))$ (R导$_9$)

③ $(x)(F(x)\longrightarrow G(x))\longrightarrow(x)(\neg G(x)\longrightarrow\neg F(x))$ (T_{-6})

④ $\cdots\longrightarrow((x)\neg G(x)\longrightarrow(x)\neg F(x))$ (T_{-6})

⑤ $\cdots\longrightarrow(\neg(x)\neg F(x)\longrightarrow\neg(x)\neg G(x))$ (T_7, R导$_3$)

⑥ $(x)(F(x)\longrightarrow G(x))\wedge\neg(x)\neg F(x)\longrightarrow\neg(x)\neg G(x)$ (T_{23})

⑦ $\cdots\longrightarrow(\exists_x)G(x)$ (T_{-9}, R导$_3$)

⑧ $(\exists_x)F(x)\longrightarrow\neg(x)\neg F(x)$ (T_{-9})

⑨ $(x)(F(x)\longrightarrow G(x))\wedge(\exists_x)F(x)\longrightarrow(\exists_x)G(x)$ (T_1, R导$_3$)

⑩ $(x)(F(x)\longrightarrow G(x))\longrightarrow((\exists_x)F(x)\longrightarrow(\exists_x)G(x))$ (T_{24}) (证毕)

T_{-14}: $(x)(F(x)\longleftrightarrow G(x))\longrightarrow((\exists_x)F(x)\longleftrightarrow(\exists_x)G(x))$

这是说：如果所有F等值于所有G，那么有的F等值于有的G。

证明：

① $(x)(F(x)\wedge G(x))\longrightarrow(x)F(x)\wedge(x)G(x)$ (T_{-3})

② $(x)((F(x)\longrightarrow G(x))\wedge(G(x)\longrightarrow F(x)))\longrightarrow(x)(F(x)\longrightarrow G(x))\wedge(x)(G(x)\longrightarrow$

$F(x))$ (R_{1-3})

③ $(x)(F(x)\longleftrightarrow G(x))\longrightarrow(x)(F(x)\longrightarrow G(x))$ $\wedge(x)(G(x)\longrightarrow F(x))$ (D_3)

④ … $\longrightarrow(x)(F(x)\longrightarrow G(x))$ (T_{14})

⑤ … $\longrightarrow((\exists_x)F(x)\longrightarrow(\exists_x)G(x))$ (T_{-13})

⑥ … $\longrightarrow(x)(G(x)\longrightarrow F(x))$ $(T15)$

⑦ … $\longrightarrow((\exists_x)G(x)\longrightarrow(\exists_x)F(x))$ (T_{-13})

⑧ … $\longrightarrow((\exists_x)F(x)\longrightarrow(\exists_x)G(x))$ $\wedge((\exists_x)G(x)\longrightarrow(\exists_x)F(x))$ (⑤，⑦T_{31})

⑨ … $\longrightarrow((\exists_x)F(x)\longleftrightarrow(\exists_x)G(x))$ (D_3)

（证毕）

T_{-15}: $(x)(p\vee F(x))\longrightarrow p\vee(x)F(x)$

T_{-16}: $p\vee(x)F(x)\longrightarrow(x)(p\vee F(x))$

T_{-17}: $(x)(p\vee F(x))\longleftrightarrow p\vee(x)F(x)$

这三条表明：如果析取式的前一支没有x，那么全称量词放在析取式前和放在后一支前是等值的。这是全称量词对析取的移置律。

证明（T_{-15}）：

① $(x)F(x)\longrightarrow F(y)$ (A_5)

② $(x)(p\vee F(x)\longrightarrow p\vee F(y))$ (R_{1-3})

③ … $\longrightarrow\neg\neg p\vee F(y)$ (R导$_5$)

④ … $\longrightarrow(\neg p\longrightarrow F(y))$ (R_{4-2})

⑤ $(x)(p\vee F(x))\wedge\neg p\longrightarrow F(y)$ (T_{23})

⑥ $(x)(p\vee F(x))\wedge\neg p\longrightarrow(y)F(y)$ (R_{3-2})

⑦ … $\longrightarrow(x)F(x)$ (R_{4-1})

⑧ $(x)(p\vee F(x))\longrightarrow(\neg p\longrightarrow(x)F(x))$ (T_{24})

⑨ …$\longrightarrow\neg\neg p\vee(x)F(x)$ (D_1)

⑩ $(x)(p\vee F(x))\longrightarrow p\vee(x)F(x)$ (T_{32})

（证毕）

证明（T_{-16}）：

① $(x)F(x) \longrightarrow F(y)$ （A_5）

② $p \vee (x)F(x) \longrightarrow p \vee F(y)$ （A_4）

③ $\cdots \longrightarrow (y)(p \vee F(y))$ （R_{3-2}）

④ $p \vee (x)F(x) \longrightarrow (x)(p \vee F(x))$ （R_{4-1}）

（证毕）

证明（T_{-17}）：（从T_{-15}和T_{-16}，据D_3得证。）

T_{-18}：$(x)(p \wedge F(x)) \longrightarrow p \wedge (x)F(x)$

T_{-19}：$p \wedge (x)F(x) \longrightarrow (x)(p \wedge F(x))$

T_{-20}：$(x)(p \wedge F(x)) \longleftrightarrow p \wedge (x)F(x)$

这三条表明：如果合取式的前一支没有x，那么全称量词放在合取式前和放在后一支前是等值的。这是全称量词对合取的移置律。

证明（T_{-18}）：

① $(x)F(x) \longrightarrow F(y)$ （A_5）

② $(x)(p \wedge F(x)) \longrightarrow p \wedge F(y)$ （R_{1-3}）

③ $p \wedge F(y) \longrightarrow p$ （T_{14}）

④ $(x)(p \wedge F(x)) \longrightarrow p$ （R导$_3$）

⑤ $p \wedge F(y) F(y)$ （T_{15}）

⑥ $(x)(p \wedge F(x)) \longrightarrow F(y)$ （R导$_3$）

⑦ $\cdots \longrightarrow (y)F(y)$ （R_{3-2}）

⑧ $\cdots \longrightarrow (x)F(x)$ （R_{4-1}）

⑨ $(x)(p \wedge F(x)) \longrightarrow p \wedge (x)F(x)$ （T_{31}）

（证毕）

证明（T_{-19}）：

① $(x)F(x) \longrightarrow F(y)$ （A_5）

② $p \wedge (x)F(x) \longrightarrow p \wedge F(y)$ （T_1）

③ $\cdots \longrightarrow (y)(p \wedge F(y))$ （R_{3-2}）

④ $p \wedge (x)F(x) \longrightarrow (x)(p \wedge F(x))$ （R_{4-1}）

（证毕）

证明（T_{-20}）：（从T_{-18}和T_{-19}，据D_3得证。）

T_{-21}：$(x)(p \longrightarrow F(x)) \longleftrightarrow p \longrightarrow (x)F(x)$

这是说：全称量词对蕴涵具有移置律。

证明：

① $(x)(p \vee F(x)) \longleftrightarrow p \vee (x)F(x)$ （T_{-17}）

② $(x)(\neg p \vee F(x)) \longleftrightarrow \neg p \vee (x)F(x)$ （R_{1-1}）

③ $(x)(p \longrightarrow F(x)) \longleftrightarrow p \longrightarrow (x)F(x)$ （D_1）

（证毕）

T_{-22}：$(x)(F(x) \longrightarrow p) \longleftrightarrow (\exists x)F(x) \longrightarrow p$

这是说：全称量词对存在量词具有转换律。

证明：

① $(x)\neg F(x) \longleftrightarrow \neg(\exists x)F(x)$ （T_{-10}）

② $p \vee (x)\neg F(x) \longleftrightarrow p \vee \neg(\exists x)F(x)$ （A_4）

③ $(x)(p \vee \neg F(x)) \longleftrightarrow p \vee \neg(\exists x)F(x)$ （T_{-17}）

④ $(x)(\neg F(x) \vee p) \longleftrightarrow p \vee \neg(\exists x)F(x)$ （R导$_5$）

⑤ $(x)(\neg F(x) \vee p) \longleftrightarrow \neg(\exists x)F(x) \vee p$ （R导$_5$）

⑥ $(x)(\neg F(x) \vee p) \longleftrightarrow (\exists x)F(x) \longrightarrow p$ （D_1）

（证毕）

T_{-23}：$(x)(y)R(x,y) \longleftrightarrow (y)(x)R(x,y)$

这是说：全称量词具有交换律。

证明：

（先证左侧蕴涵右侧）

① $(x)F(x) \longrightarrow F(y)$ （A_5）

② $(x)F(x) \longrightarrow F(z)$ （R_{1-2}）

③ $(x)(y)R(x,y) \longrightarrow (y)R(z,y)$ （R_{1-3}）

④ $(y)F(y) \longrightarrow F(u)$ （A_5, R_{1-2}, R_{4-1}）

⑤ $(y)R(z,y) \longrightarrow R(z,u)$ （R_{1-3}）

⑥ $(x)(y)R(x,y) \longrightarrow R(z,u)$ （③，⑤R导$_3$）

⑦ $(x)(y)R(x,y) \longrightarrow (z)R(z,u)$ （R_{3-2}）

⑧ $\cdots \longrightarrow (u)(z)R(z,u)$ （R_{3-2}）

⑨ $(x)(y)R(x,y) \longrightarrow (y)(x)R(x,y)$ （R_{4-1}）

（再证右侧蕴涵左侧）

⑩ $(y)F(y) \longrightarrow F(u)$ （A_5，R_{1-2}，R_{4-1}）

⑪ $(y)(x)R(x,y) \longrightarrow (x)R(x,u)$ （R_{1-3}）

⑫ $(x)F(x) \longrightarrow F(z)$ （A_5，R_{1-2}）

⑬ $(x)R(x,u) \longrightarrow R(z,u)$ （R_{1-3}）

⑭ $(y)(x)R(x,y) \longrightarrow R(z,u)$ （⑪，⑬R导$_3$）

⑮ $\cdots \longrightarrow (u)R(z,u)$ （R_{3-2}）

⑯ $\cdots \longrightarrow (z)(u)R(z,u)$ （R_{3-2}）

⑰ $(y)(x)R(x,y) \longrightarrow (x)(y)R(x,y)$ （R_{4-1}）

⑱ （从⑨，⑰，据D_3证得T_{-23}）（证毕）

T_{-24}: $(\exists x)(y)R(x,y) \longrightarrow (y)(\exists x)R(x,y)$

本条的逆命题并不成立，说明了重迭量词换位的不可任意性。

证明：

① $F(y) \longrightarrow (\exists x)F(x)$ （A_6）

② $F(z) \longrightarrow (\exists x)F(x)$ （R_{1-2}）

③ $R(z,y) \longrightarrow (\exists x)R(x,y)$ （R_{1-3}）

④ $(y)(R(z,y) \longrightarrow (\exists x)R(x,y))$ （R导$_9$）

⑤ $(y)R(z,y) \longrightarrow (y)(\exists x)R(x,y)$ （T_{-6}）

⑥ $(\exists z)(y)R(z,y) \longrightarrow (y)(\exists x)R(x,y)$

（R_{3-1}）

⑦ $(\exists x)(y)R(x,y) \longrightarrow (y)(\exists x)R(x,y)$

（R_{4-1}）（证毕）

T_{-25}: $(x)(y)R(x,y) \longrightarrow (x)R(x,x)$

这是说：如果所有x和所有y具有R关系，那么所有x和自身 也 都具有R关系。

证明：

① $(x)F(x)\longrightarrow F(z)$ (A_5, R_{1-2})

② $(x)(y)R(x, y)\longrightarrow (y)R(z, y)$ (R_{1-3})

③ $(y)F(y)\longrightarrow F(u)$ (A_5, R_{1-2}, R_{4-1})

④ $(y)R(z, y)\longrightarrow R(z, u)$ (R_{1-3})

⑤ $(x)(y)R(x, y)\longrightarrow R(z, u)$ (②，④R导$_3$)

⑥ $(x)(y)R(x, y)\longrightarrow R(z, z)$ (R_{1-2})

⑦ $(x)(y)R(x, y)\longrightarrow (z)R(z, z)$ (R_{3-2})

⑧ $(x)(y)R(x, y)\longrightarrow (x)R(x, x)$

(R_{4-1})（证毕）

T_{-26}： $(\exists_x)(F(x)\vee G(x))\longleftrightarrow(\exists_x)F(x)\vee(\exists_x)G(x)$

这是说：存在量词对于析取具有分配律。

证明：

① $(x)(F(x)\wedge G(x))\longleftrightarrow(x)F(x)\wedge(x)G(x)$ (T—5)

② $(\exists_x)(F(x)\vee G(x))\longleftrightarrow(\exists_x)F(x)\vee(\exists_x)G_{(x)}$ （R导8） （证毕）

T_{-27}：$(\exists x)(F(x)\wedge G(x))\longrightarrow(\exists_x)F(x)\wedge(\exists_x)G_{(x)}$

这是说：存在量词对于合取具有分配律，但不能提取。

证　明：

①$(x)F(x)\vee(x)G(x)\longrightarrow(x)(F(x)\vee G(x))$ (T—8)

② $(\exists_x)(F(x)\wedge G(x))\longrightarrow(\exists_x)F(x)\wedge(\exists_x)G_{(x)}$ （R导8） （证毕）

T_{-28}： $(\exists_x)(p\wedge F(x))\longleftrightarrow p\wedge(\exists_x)F(x)$

这是说：存在量词对于合取具有移置律。

证明：（T_{-17}，R导$_8$）。

T_{-29}：　$(\exists x)(p\vee F(x))\longleftrightarrow p\vee(\exists x)F(x)$

这是说：存在量词对于析取具有移置律。

证明：（T_{-20}，R导$_8$）。

T_{-30}：　$(\exists x)(\exists y)R(x,y)\longleftrightarrow(\exists y)(\exists x)R(x,y)$

这是说：存在量词具有交换律。

证明：（T_{-23}，R导$_8$）。

T_{-31}：　$(\exists x)R(x,x)\longrightarrow(\exists x)(\exists y)R(x,y)$

这是说：如果有的x和自身具有R关系，那么有的x和有的y就具有R关系。

证明：（T_{-25}，R导$_8$）。

（二）K系统　这也是一种谓词演算的公理推理系统，我们先介绍它的一阶语言，然后简介系统本身。

1.一阶语言　一阶谓词逻辑的语言是一阶语言。一阶语言由两部分构成，即由初始符号（字母表）和形成规则构成。初始符号有三种：第一种叫关系符号，第二种叫函数（或运算）符号，第三种叫（个体）常量符号。人们根据初始符号和形成规则，就可以把自然语言符号化成一阶语言的合式公式。这种符号本身没有什么意义，它们只有在人们的不同解释中才能得到某种意义。

我们用德文草体$\mathfrak{L}$表示一阶语言。$\mathfrak{L}$的初始符号如下：

（1）个体变项：x_1，x_2，…；

（2）个体常项（可能空）：a_1，a_2，…；

（3）谓词符号：　A_i^n（i，n≥1）；

（4）函数符号：f_i^n（i，n≥1，可能空）；

（5）联结词：¬，⟶；

（6）量词：∀（全称“所有”）；

（7）括号（　　）和逗号，。

定义1：$\mathscr{L}$中的项。

（1）个体变项和个体常项是项；

（2）如果f_i^n是$\mathscr{L}$的函数符号，$t_1, \cdots, t_n$是$\mathscr{L}$的项，则$f_i^n(t_1, \cdots, t_n)$是项；

（3）只有（1）或（2）才是项。

定义2：$\mathscr{L}$中的原子公式。

如果A_i^n是$\mathscr{L}$的谓词符号，并且t_1，…，t_n是$\mathscr{L}$的项，则$A_i^n(t_1, \cdots, t_n)$是$\mathscr{L}$的原子公式。

原子公式是一阶语言中最简单的表达式，它们可以被解释成简单命题。例如$A_1^2(x_1, x_2)$可以解释成$x_1 = x_2$。

定义3：$\mathscr{L}$中的合式公式。

（1）$\mathscr{L}$中的原子公式是合式公式；

（2）如果A，B是合式公式，则（$\neg$A），（A$\longrightarrow$B），（$\forall x_i$A）也都是合式公式，其中$i \geqslant 1$，即x_i是任意的个体变项（上述括号在不造成歧义时可省略）；

（3）只有（1）或（2）才是合式公式。

定义4：关于量词$\exists$（特称"存在"）。

$\exists x_i$A是合式公式$\neg$（$\forall x_i \neg$A）的简写。

定义5：合式公式的层次。

（1）A是0层的当且仅当A是原子公式；

（2）A是$k+1$层的当且仅当A是下列情况之一（$k \geqslant 0$）：

①A＝（$\neg$B），B是k层的；

②A＝（B$\longrightarrow$C），$\max\{i, j\} = k$，其中i，j分别为B，C的层次；

③A＝（$\forall x_i$B），B是k层的。

定义6：量词的辖域及个体变项的约束与自由。

在合式公式$\forall x_i$A中，称A为$\forall x_i$的辖域。当$\forall x_i$A为合式公

式B的子公式时，称$\forall x_i$在B中的辖域为A。

若变项x_i是$\forall x_i$中的x_i或出现在$\forall x_i$的辖域中，则称x_i为约束出现的；反之，不是或不出现其中的就称为自由出现的。

定义7：令A（x_i）是$\mathscr{L}$中的任意合式公式，x_i在其中自由出现。称项t对A（x_i）中的x_i是自由的，如果下面两点不同时成立：

（1）x_i在$\forall x_j$的辖域中（$j \neq i$）；

（2）t中有x_j。

例如，对于合式公式 $\forall x_1 A_1^2(x_1, x_2) \longrightarrow \forall x_3 A_2^2(x_1, x_3)$，项 $f_1^2(x_1, x_4)$对于其中自由出现的x_2是不自由的，而对于自由出现的x_1是自由的。简言之，所谓项t对A（x_i）中的x_i是自由的，是指当用t去置换A（x_i）中自由出现的x_i时，不引起t中变项和A（x_i）中量词的任何相互作用。

2．公理系统　在上述一阶语言$\mathscr{L}$的基础上，下面就是公理系统K。

（1）初始符号：同于$\mathscr{L}$中的初始符号。

（2）合式公式：同于$\mathscr{L}$中的合式公式。

（3）公理模式（用K来表示）

①K_1：$(A \longrightarrow (B \longrightarrow A))$

②K_2：$(A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow ((A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow C))$

③K_3：$((\neg A \longrightarrow \neg B) \longrightarrow (B \longrightarrow A))$

④K_4：$(\forall x_i A \longrightarrow A)$（$x_i$不自由出现在A中）

⑤K_5：$(\forall x_i A(x_i) \longrightarrow A(t))$

（t是对A(x_i)中的x_i自由的项）

⑥K_6：$((\forall x_i (A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow \forall x_i B))$

（A中无自由出现的x_i）

（4）推理规则

①MP规则　从A和（$A \longrightarrow B$）可以推出B；

②∪G规则　从A可以推出$\forall x_i A$，其中x_i为任意的个体变项；

③HS规则　从($A \longrightarrow B$)和($B \longrightarrow C$)可以推出($A \longrightarrow C$)。

有了以上的出发点部分，就可以进行公理系统k中定理的证明了。

定义1：K中的证明是𝒮中的有穷非空合式公式序列，A_1，…，A_n，使得对于每个i（$1 \leqslant i \leqslant n$），$A_i$或者是K的公理，或者是由序列前面的合式公式用MP规则或∪G规则得到。其中A_n称作K的定理，记作$\vdash_K A_n$。

定义2：如果Γ是𝒮中的合式公式集，K中的Γ的推演是一个类似于证明的序列，所不同的是A_i可能为Γ中的合式公式。其中A_n称作Γ在K中的结论，记作$\Gamma \vdash_K A_n$。

定理1：K的演绎定理。令A，为𝒮B中的合式公式，Γ为𝒮中的合式公式集（可能空）。如果$\Gamma \cup \{A\} \vdash_K B$，并且在推演过程中没有对出现在A中的自由个体变项应用∪G规则，则有$\Gamma \vdash_K (A \longrightarrow B)$。（证明从略）

定义3：若A是个无自由个体变项出现的合式公式，则称A为封闭公式。

推论2：如果$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$，并且A为封闭公式，则有$\Gamma \vdash_K (A \longrightarrow B)$。（证明从略）

推论3：对于K的任意合式公式A，B，C，有$\{(A \longrightarrow B), (B \longrightarrow C)\} \vdash_K (A \longrightarrow C)$。（证明从略）

有了以上的定理和推论，K中的定理证明就可以得到简化。下面只举一例。

求证：$\vdash_K (A \longrightarrow (\forall x_i B)) \longrightarrow (\forall x_i (A \longrightarrow B))$，

其中x_i不自由出现在A中。

证明：先证{（$A\longrightarrow(\forall x_i B)$）}$\vdash_K$（$\forall x_i(A\longrightarrow B)$）

① （$A\longrightarrow(\forall x_i B)$）　　（假设）

② （（$\forall x_i B$）$\longrightarrow B$）　　（K_4或K_5）

③ （$A\longrightarrow B$）　　（①，②HS）

④ （$\forall x_i(A\longrightarrow B)$）　　（UG）

∵由x_i不自由出现在A中，有x_i不自由出现在（$A\longrightarrow$（$\forall x_i B$））中，

∴由演绎定理，有$\vdash_K$（$A\longrightarrow(\forall x_i B)$）$\longrightarrow$（$\forall x_i(A\longrightarrow B)$）。

（证毕）

三　自然推理系统

和命题演算一样，谓词演算也有各种形式的自然推理系统。所谓自然推理，就是其出发点不是公理而是推理时引进的假设，或者说其公理集合为零而只靠假设和推理规则进行的形式演绎推理。由于这种推理很象自然科学尤其是数学中常用的那些演绎推理（如定律、定理的证明），所以称作"自然推理"。我们在此对谓词演算只介绍两种自然推理系统。

（一）普通系统　所谓普通系统，就是人们常接触到的、或者说其方法简易而直观性又比较强的一些系统。我们在此介绍两种。

U系统　利用命题公式间的各种等值关系和蕴涵关系，通过一些推理规则，从已知的命题公式推出另一些新的命题公式，这是命题演算中的推理。类似地，利用谓词公式间的各种等值关系和蕴涵关系，通过一些推理规则，从一些谓词公式推出另一些谓词公式，这就是谓词演算中的推理。在谓词演算中要进行正确的推理，也必须构造一个结构严谨的形式证明，因此也要求给出

一些相应的推理规则。命题演算中所使用的推理规则都可以应用于谓词演算的推理中。除此以外，由于谓词逻辑中引进了个体词、谓词和量词等，因此又增加了一些推理规则。

关于推理规则：

1.前提引入规则　在证明的任何步骤上都可以引用前提。

2.结论引用规则　在证明的任何步骤上所得到的结论都可以在其后的证明中引用。

3.分离规则　在证明过程中如果出现了某个推理定律的前件，立刻就可得到由这个前件所推出的后件。

4.全称特定化规则（US）：

$$(\forall x)A(x)\longrightarrow A(y)$$

A（y）是将A（x）中的x处处代之以y。要求y在A（x）中不约束出现。这里自由变项y也可以写成个体常项c，这时c为个体域中任意一个确定的个体。这个规则的意思是说，如果个体域的所有元素都具有性质A，那么个体域中的任一个元素就具有性质A。

5.存在特定化规则（ES）：

$$(\exists x)A(x)\longrightarrow A(c)$$

这里c是个体域中的某个确定的个体。这条规则是说，如果个体域中存在有性质A的元素，那么个体域中必有某一元素c具有性质A。但是，如果（$\exists x$）A（x）中有其他自由个体变项出现，并且x是随其他自由个体变项的值而变，那么就不存在唯一的c使得A（c）对自由个体变项的任意值都是成立的。这时，就不能应用存在特定化规则。

6.全称一般化规则（UG）：

$$A(x)\longrightarrow(\forall y)A(y)$$

这个规则是说，如果个体域中任意一个个体都具有性质A，那么个体域中的全体个体就都具有性质A。这里要求x必须是自由变

项，并且y不出现在A（x）中。

7.存在一般化规则（EG）：

A（c）⟶（∃y）A（y）

这个规则是说，如果个体域中有某一元素c具有性质A，那么个体域中就存在着具有性质A的元素。这里要求y不在A（c）中出现。

在以上规则的基础上，本系统还给出了若干常用公式，并认为这些公式的有效性是极为明显和极容易证明的，比如其中的命题公式就可以用真值表验证。这些公式大致如下。

首先是等值式（⟷）：

（1）交换律：①$p\vee q\longleftrightarrow q\vee p$；

②$p\wedge q\longleftrightarrow q\wedge p$。

（2）结合律：①$(p\vee q)\vee r\longleftrightarrow p\vee(q\vee r)$；

②$(p\wedge q)\wedge r\longleftrightarrow p\wedge(q\wedge r)$。

（3）分配律：①$p\wedge(q\vee r)\longleftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$；

②$p\vee(q\wedge r)\longleftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$。

（4）同一律：①$p\vee 0\longleftrightarrow p$；

②$p\wedge 1\longleftrightarrow p$。

（5）互否律：①$p\vee\neg p\longleftrightarrow 1$；

②$p\wedge\neg p\longleftrightarrow 0$。

（6）双重否定律：①，②$\neg(\neg p)\longleftrightarrow p$。

（7）等幂律：①$p\vee p\longleftrightarrow p$；

②$p\wedge p\longleftrightarrow p$。

（8）零一律：①$p\vee 1\longleftrightarrow 1$；

②$p\wedge 0\longleftrightarrow 0$。

（9）吸收律：①$p\vee(p\wedge q)\longleftrightarrow p$；

②$p\wedge(p\vee q)\longleftrightarrow p$。

（10）德·摩根定律：①$\neg(p\vee q)\longleftrightarrow\neg p\wedge\neg q$；

②$\neg(p\wedge q)\longleftrightarrow\neg p\vee\neg q$。

（11）蕴涵定义：$p\longrightarrow q\longleftrightarrow\neg p\vee q$。

（12）等值定义：①$(p\longleftrightarrow q)\longleftrightarrow(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$；

②$(p\longleftrightarrow q)\longleftrightarrow(p\longrightarrow q)\wedge(q\longrightarrow p)$，

（13）蕴涵否定：$\neg(p\longrightarrow q)\longleftrightarrow p\wedge\neg q$。

（14）等值否定：$\neg(p\longleftrightarrow q)\longleftrightarrow(p\longleftrightarrow\neg q)$。

（15）假言易位：$p\longrightarrow q\longleftrightarrow\neg q\longrightarrow\neg p$。

（16）条件合取：$p\longrightarrow(q\longrightarrow r)\longleftrightarrow(p\wedge q)\longrightarrow r$。

（17）量词分配：①$(\exists x)(A(x)\vee B(x))\longleftrightarrow(\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$；

②$(\forall x)(A(x)\wedge B(x))\longleftrightarrow(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x)$。

（18）量词否定：①$\neg(\exists x)A(x)\longleftrightarrow(\forall x)\neg A(x)$；

②$\neg(\forall x)A(x)\longleftrightarrow(\exists x)\neg A(x)$。

（19）量词移置：

①$(\forall x)(A\vee B(x)\longleftrightarrow A\vee(\forall x)B(x)$；

②$(\exists x)(A\wedge B(x)\longleftrightarrow A\wedge(\exists x)B(x)$。

③$(\forall x)A(x)\longrightarrow B\longleftrightarrow(\exists x)(A(x)\longrightarrow B)$；

④$(\exists x)A(x)\longrightarrow B\longleftrightarrow(\forall x)(A(x)\longrightarrow B)$。

⑤$A\longrightarrow(\forall x)B(x)\longleftrightarrow(\forall x)(A\longrightarrow B(x))$；

⑥$A\longrightarrow(\exists x)B(x)\longleftrightarrow(\exists x)(A\longrightarrow B(x))$。

其次是蕴涵式（$\longrightarrow$）：

（20）合取消去：①$p\wedge q\longrightarrow p$；

②$p\wedge q\longrightarrow p$。

（21）析取消去：①$(p\vee q)\wedge(p\longrightarrow r)\wedge(q\longrightarrow r)\longrightarrow r$。

②$(p\vee q)\wedge\neg p\longrightarrow q$

（22）蕴涵消去：①$p \wedge (p \longrightarrow q) \longrightarrow q$；

②$\neg q \wedge (p \longrightarrow q) \longrightarrow \neg p$。

（23）合取构成：$p, q \longrightarrow p \wedge q$。

（24）析取引入：①$p \longrightarrow p \vee q$；

②$q \longrightarrow p \vee q$。

（25）蕴涵否定：①$\neg(p \longrightarrow q) \longrightarrow p$；

②$\neg(p \longrightarrow q) \longrightarrow \neg q$。

（26）蕴涵怪论：①$\neg p \longrightarrow (p \longrightarrow q)$；

②$q \longrightarrow (p \longrightarrow q)$。

（27）三段论法：$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \longrightarrow p \longrightarrow q$。

（28）全称提取：$(\forall_x) A(x) \vee (\forall_x) B(x) \longrightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$。

（29）特称分配：$(\exists_x)(A(x) \wedge B(x)) \longrightarrow (\exists x) A(x) \wedge (\exists_x) B(x)$。

下面举例说明本系统谓词演算的推理过程。

例1.证明$(\forall x)(A(x) \longrightarrow B(x)) \wedge A(c) \longrightarrow B(c)$。

证明：

①$(\forall_x)(A(x) \longrightarrow B(x))$　（前提）

②$A(c) \longrightarrow B(c)$　（①US）

③$A(c)$　（前提）

④$B(c)$　（②，③据（22）—①）（证毕）

这就是逻辑中的“三段论推理”。例如“所有人都是有肤色的，欧洲人是人，所以欧洲人是有肤色的”。

例2.证明$(\exists_x)(A(x) \wedge B(x)) \longrightarrow (\exists_x) A(x) \wedge (\exists_x) B(x)$

证明：

①$(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$　（前提）

②$A(c)\wedge B(c)$　　（①，ES）

③$A(c)$　　（②，(20)—①）

④$B(c)$　　（②，(20)—②）

⑤$(\exists x)A(x)$　　（③，EG）

⑥$(\exists x)B(x)$　　（③，EG）

⑦$(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$　　（⑤，⑥，(23)）

（证毕）

在使用US，ES，UG，EG这四条规则时，要注意严格按照它们的规定去使用，否则会推出错误的结论。可以举例说明这一点。例如公式$(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)\longrightarrow(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$并不是有效公式，但是会有下列证明：

①$(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$　　（前提）

②$(\exists x)A(x)$　　（①，(20)—①）

③$(\exists x)B(x)$　　（①，(20—②)

④$A(c)$　　（②，ES）

⑤$B(c)$　　（③，ES）

⑥$A(c)\wedge B(c)$　　（④，⑤(23)）

⑦$(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$　　（⑥，EG）（证毕）

这个证明是错误，错误在于④，⑤两步使用ES规则时得到的$A(c)$和$B(c)$中的个体元素c不应该是相同的。

我们看到，本系统在基本形式上是属于自然推理系统，比如从推理规则出发，从假设前提出发等等。但是其中也预先给出了若干常用公式，并在具体证明中经常使用，而这些常用公式实际上是起到某种推理规则的作用。

P系统　我们先讲这一系统的推理规则。

1．蕴涵引入（$\longrightarrow$引入）。由〔A〕…B，可以推得$A\longrightarrow B$。外面有方括弧的公式，例如〔A〕，只是暂时的假设。它是说，如果假设了A从而可以推演出B，那么A就蕴涵B。A是被解除了的

假设公式，它不是结论"A⟶B"的前提或根据。但是整个推演"〔A〕…B"却是结论"A⟶B"的前提或根据。这是合乎数学中的实际推理方法的。在数学中，假如要证明：如果A，那么B。人们的方法时常不是直接去证明"A蕴涵B"（即A⟶B），而是设法得到以下的推演：假设A（或者再进一步假设其他），那么根据已知推理规则（或者已知定理、特质等）最终可以推得B。这样，就间接地证明了原命题：如果A，那么B（即"A蕴涵B"，即"A⟶B"）。我们举个例子。

求证：如果a＞b，那么（a+c）＞（b+c）。

证明：

①设：a＞b，

②于是，a－b＞0，　　（据＞定义）

③（a－b）+（c－c）＞0，　　（据＞性质）

④（a+c）－（b+c）＞0，　　（据交换律）

⑤最终得，（a+c）＞（b+c）　（据＞性质）　（证毕）

作为数学题，这样的证法就可以了，最后也不用再写"如果a＞b，那么（a+c）＞（b+c）"。但是作为揭示这种普遍性证明方法的逻辑学，则要求写得详尽一些。

2．蕴涵销去（⟶销去）。由A和A⟶B，可以推得B。这是充分条件中肯定式假言推理的反映，只要符合这条规则的要求，推理的结论就会准确无误。

3．合取引入（∧引入）。由A和B，可以推得A∧B。这是联言构成式推理的反映，就是说，只要有两个命题是可以被断定的，那么这两个命题就可以合取起来。

4．合取销去（∧销去）。由A∧B，既可以推得A，也可以推得B。这是联言分解式推理的反映，就是说，只要合取式被断定，那么支命题就可以被分别断定。

5．析取引入（∨引入）。由A，可以推得A∨B；由B，也

可以推得 A∨B。这是选言（相容的）构成式推理的反映，就是说，只要某命题可以被断定，那么另外一个命题（不管或真或假）就可以与此命题构成析取。这条规则相当于前述公理系统中的第2条公理。

6．析取销去（∨销去）。由A∨B，以及〔A〕…C 和〔B〕…C，可以推得C。这是假言选言推理中肯定式的反映，也称二难推理。它在证明中也称分情况证明方法。C 是我们所要证明的命题。设A∨B穷尽了一切可能的情况。虽然我们不知道A和B何者为真，但是，如果能够证明，从A可以推得C，从B也可以推得 C，那么我们就可以证得 C。A∨B是C真的前提，〔A〕和〔B〕都是在证明中立出的假设公式，最后都要通过进一步推理中解除。

7．非的引入（¬引入）。由〔A〕…B 和〔A〕…¬B，可以推得¬A。如果从A可以推得 B，从A又可以推得¬B，那么从 A就可以推出逻辑矛盾，因而¬A。显然¬A不是以 A 为前提，而是以〔A〕…B和〔A〕…¬B为前提，〔A〕是要被解除的假设公式。

8．非的销去（¬销去）。由¬¬A，可以推得 A。这是双重否定可得肯定。

9。全称引入（∀引入）。由$A(\theta_1)$，可以推得$(\forall\theta_2)A(\theta_2)$。其中，$\theta_2$不得在曾经引用本规则的任一被解除的公式中作为自由变项出现。这条规则是说：如果从某个个体域中任取一个个体而得知它具有A 性质，那么也就能推出这个个体域中的所有个体都有这个性质。

10．全称销去（∀销去）。由$(\theta_1)A(\theta_1)$，可以推得$A(\theta_2)$。这是说：如果已经断定某个个体域中的一切个体都有某个性质，那么任取该个体域中的一个个体，就可以推知这个个体也具有那个性质。这条规则相当于前述公理系统中的第5条公理。

11．特称引入（∃引入）。由$A(\theta_1)$，可以推得$(\exists\theta_2)A(\theta_2)$。这是说：如果已经断定某个个体域中的任意个体具有某个性质，

那么就能断定这个个体域中存在着某个体具有这个性质。这条规则相当于前述公理系统中的第6条公理。

12．特称销去（∃销去）。由$(\exists\theta_1)A(\theta_1)$，以及〔$A(\theta_2)$〕…B，其中B没有$\theta_2$，就可以推得B。就是说，$\theta_2$除了在本规则被解除公式中自由出现外，不得在曾经引用本规则的其他任一被解除公式中作为自由变项出现。

13．假设和自返规则。根据证明需要，随时可以引入假设，而且对以前的假设还可以随时再使用，因此称为自返。

下面具体介绍几个证明。

T_1：$(\forall x)F(x) \longrightarrow F(y)$

证明：

①	┌─┤$(\forall x)F(x)$	（假设）
②	│　$F(y)$	（∀销去）
③	↓$(\forall x)F(x) \longrightarrow F(y)$	（⟶引入）（证毕）

T_2：$F(y) \longrightarrow (\exists x)F(x)$

证明：

①	┌─┤$F(y)$	（假设）
②	│　$(\exists x)F(x)$	（∃引入）
③	↓$F(y) \longrightarrow (\exists x)F(x)$	（⟶引入）　（证毕）

T_3：$(\forall x)(p \longrightarrow F(x)) \longrightarrow (p \longrightarrow (\forall x)F(x))$

证明：

①	┌──┤$(\forall x)(p \longrightarrow F(x))$	（假设）
②	│　$p \longrightarrow F(x)$	（∀销去）
③	│┌─┤p	（假设）
④	││　$F(x)$	（⟶销去）
⑤	││　$(\forall x)F(x)$	（∀引入）
⑥	│↓$p \longrightarrow (\forall x)F(x)$	（⟶引入）
⑦	↓$(\forall x)(p \longrightarrow F(x)) \longrightarrow (p \longrightarrow (\forall x)F(x))$	（⟶引入）（证毕）

T_4：$(\exists x)F(x) \longrightarrow \neg(\forall x)\neg F(x)$

证明：

① $(\exists x)F(x)$ （假设）

② $F(y)$ （假设）

③ $(\forall x)\neg F(x)$ （假设）

④ $\neg F(y)$ （$\forall$销去）

⑤ $F(y)$ （自返）

⑥ $\neg(\forall x)\neg F(x)$ （$\neg$引入）

⑦ $\neg(\forall x)\neg F(x)$ （$\exists$销去）

⑧ $(\exists x)F(x) \longrightarrow \neg(\forall x)\neg F(x)$ （$\longrightarrow$引入）（证毕）

（二）F系统　逻辑的主要任务之一就是要阐明逻辑后承和逻辑有效性的概念。现在，我们要用公式的可证性概念来描述它的逻辑有效性。一阶逻辑主要研究推理，它的许多有效公式都是有效的推理形式的反映。或者说，一个有效推理的形式是一阶逻辑的一个逻辑有效的蕴涵式，推理的前提是此蕴涵式的前件，结论是后件。因此，在完全性定理下，一个有效推理的形式是一阶逻辑的一个可证公式。给定一个具体的推理，在我们确定用来表示该推理中出现的特殊个体和关系所需要的常项和关系符号后，我们就可利用这些符号和个体变项、联结词、量词把这一推理的形式表示成一阶逻辑中的一个蕴涵式。如果所给推理是有效的，那么表示这一推理的形式的蕴涵式就应当是一个可证公式；如果这个蕴涵式不是可证的，那么所给推理一定是无效的。下面具体看F系统。

1．结构规则

(1) Hyp（假设引入规则）　可按需要随时引入一个假设。

(2) Rep（重复规则）　在一个假设下出现的公式（包括假设）可允许重复出现。

(3) Reit（重述规则）　在一个假设下出现的公式（包括假

设）可在随后的假设下重复出现。

2. 联结词规则

(1) $\longrightarrow$I($\longrightarrow$引入)：从由A到B的子证明可以推出A$\longrightarrow$B。

(2) $\longrightarrow$E（$\longrightarrow$消去）：从A和A$\longrightarrow$B可以推出B。

(3) $\wedge$I（$\wedge$引入）：从A和B可以推出（A$\wedge$B）。

(4) $\wedge$E（$\wedge$消去）：从（A$\wedge$B）可以推出A；从（A$\wedge$B）也可以推出B。

(5) $\vee$I（$\vee$引入）：从A可以推出（A$\vee$B）；从B也可以推出（A$\vee$B）。

(6) $\vee$E（$\vee$消去）：从（$A_1 \vee A_2$），$A_1 \longrightarrow$B和$A_2 \longrightarrow$B可以推出B。

(7) $\longleftrightarrow$I（$\longleftrightarrow$引入）：从（A$\longrightarrow$B）和（B$\longrightarrow$A）可以推出（A$\longleftrightarrow$B）。

(8) $\longleftrightarrow$E（$\longleftrightarrow$消去）：从（A$\longleftrightarrow$B）和A可以推出B，或者可以推出（A$\longrightarrow$B）；从（A$\longleftrightarrow$B）和B可以推出A，或者可以推出（B$\longrightarrow$A）。

(9) $\neg$（非）：从由$\neg$A到$\neg$B和B的子证明可以推出A。

3. 量词规则

(1) $\forall$I（$\forall$引入）　从A(y/x)可以推出（$\forall$x)A；这里，y既不在($\forall$x)A中自由出现，也不在A(y/x)所依赖的假设中自由出现；y被称为关键变项。这条规则称作"全称引入规则"，它反映演绎推理中这样的规则：如果从个体域中任意取一个个体a而能推出a具有某个性质，那么也就能推出这个个体域中的所有个体都具有这个性质。在应用这个规则时，一定要注意对关键变项所附加的限制条件。规则中所说的"也不在A(y/x)所依赖的假设中自由出现"是指，y不在A(y/x)所属子证明利用Hyp规则引入的公式中自由出现，也不在该子证明所从属的子证明、所从属的子证明所从属的子证明、……利用Hyp规则引入的公式中自由

出现。这样，当x在A中有自由出现而A(y/x)本身是Hyp规则引入时，就不能直接引用∀I规则而得到(∀x)A。

(2) ∀E(∀消去) 从(∀x)A可以推出A(t/x)。这是全称消去规则，它反映演绎推理中这样的规则：如果已经断定某个个体域中的一切个体都有某个性质，那么任取该个体域中的一个个体，就可以推知这个个体也具有那个性质。

(3) ∃I(∃引入) 从A(t/x)可以推出($\exists_x$)A。这是存在引入规则，它反映演绎推理中这样的规则：如果某个个体域中任取一个个体都具有某个性质，那么这个个体域中就存在着某个体具有那个性质。

(4) ∃E(∃消去) 从($\exists_x$)A和A(y/x)⟶B，可以推出B；这里的y也称为关键变项，它既不在($\exists_x$)A和B中自由出现，也不在A(y/x)⟶B所依赖的假设中自由出现。这是存在消去规则，它反映演绎推理中的下述规则：任取个体域中一个个体a，从这个个体有某个性质能推出某个命题，那么从个体域中至少有一个个体具有这一性质，也就能推出这个命题。因此，当我们想要从给定前提($\exists_x$)A推出B时，我们不必直接从($\exists_x$)A出发来进行推导，而可以从A(y/x)出发，只要能从A(y/x)推出B，我们也就证明了从前提($\exists_x$)A能推出B。跟∀I规则相类似，在引用这一规则时一定要注意对关键变项所附加的限制条件。规则中所说"也不在A(y/x)⟶B所依赖的假设中自由出现"是指，y不在A(y/x)⟶B所属子证明、该子证明所从属的子证明、所从属的子证明所从属的子证明、……利用Hyp规则引入的公式中自由出现。

F的一个证明就是按上述规则构造出来的一系列公式。如果一个证明在其论证过程中引进的假设并未都用¬I和⟶I消除，则称该证明为假设性证明。当A是某个非假设性证明的最后一步时，则称A为(形式)可证的或称为F的定理，同时也称该证明为A的一个(形式)证明。

由于$\forall$I和$\exists$E两条规则比较复杂，我们在使用这两条规则时必须注意对关键变项所附加的限制条件，否则将会使并非有效的公式成为可证公式。

下面我们按照规则要求证明若干公式为定理（用T表示），为简略起见，省掉一些括号。

T_1：$A \longrightarrow (\exists x)A$

证明：

①	○ A	（Hyp）
②	$(\exists x)A$	（$\exists$I）
③	$A \longrightarrow (\exists x)A$	（$\longrightarrow$I）（证毕）

T_2：$(\exists x)A \longrightarrow A$，x不在A中自由出现。

证明：

①	○ $(\exists x)A$	（Hyp）
②	○$A(x/x)$即A	（Hyp）
③	A	（Rep）
	$A \longrightarrow A$	（$\rightarrow$I）
	A	（E_x）
	$(\exists x)A \longrightarrow A$	（$\rightarrow$I）（证毕）

T_3：$(\exists x)A \longrightarrow (\forall x)A$，x不在A中自由出现。

证明：

①	○ $(\exists x)A$	（Hyp）
②	○$A(x/x)$即A	（Hyp）
③	A	（Rep）
④	$A \longrightarrow A$	（$\longrightarrow$I）
⑤	A	（$\exists$E）
⑥	$(\forall x)A$	（$\forall$I）
⑦	$(\exists x)A \longrightarrow (\forall x)A$	（$\rightarrow$I）（证毕）

由于x不在A中自由出现，当然更不在$(\forall_x)A$和$(\exists_x)A$中自由出现，因此$\exists E$和$\forall I$两规则在这里都是可以用的。

T_4：$(\forall_x)(\forall_y)A \longrightarrow (\forall_y)(\forall_x)A$

证明：

①	○ $(\forall x)(\forall y)A$	(Hyp)
②	$(\forall y)A$	($\forall$E)
③	A	($\forall$E)
④	$(\forall x)A$	($\forall$I，x是关键变项)
⑤	$(\forall y)(\forall x)A$	($\forall$I，y是关键变项)
⑥	$(\forall x)(\forall y)A \longrightarrow (\forall y)(\forall x)A$	($\rightarrow$I)(证毕)

T_5：$(\exists_x)(\exists_y)A \longrightarrow (\exists_y)(\exists_x)A$

证明：

①	○ $(\exists_x)(\exists_y)A$	(Hyp)
②	○ $(\exists_y)A$	(Hyp)
③	○ A	(Hyp)
④	$(\exists_x)A$	($\exists$I)
⑤	$(\exists_y)(\exists_x)A$	($\exists$I)
⑥	$A \longrightarrow (E_y)(\exists_x)A$	($\rightarrow$I)
⑦	$(\exists_y)(\exists_x)A$	($\exists$E，y是关键变项)
⑧	$(\exists_y)A \longrightarrow (\exists_y)(\exists_x)A$	($\rightarrow$I)
⑨	$(\exists_y)(\exists_x)A$	($\exists$E，x是关键变项)
⑩	$(\exists_x)(\exists_y)A \longrightarrow (\exists_y)(\exists_x)A$	($\rightarrow$I)(证毕)

T_6：$(\exists_x)(A\wedge B) \longrightarrow (\exists_x)A\wedge B$，x不在B中自由出现。

证明：

①	○ $(\exists x)(A\wedge B)$	(Hyp)
②	○ $A\wedge B$	(Hyp)
③	A	($\wedge$E)
④	$(\exists x)A$	($\exists$I)
⑤	B	($\wedge$E)
⑥	$(\exists x)A\wedge B$	($\wedge$I)
⑦	$A\wedge B\longrightarrow(\exists x)A\wedge B$	($\rightarrow$I)
⑧	$(\exists x)A\wedge B$	($\exists$E, x是关键变项)
⑨	$(\exists x)(A\wedge B)\longrightarrow(\exists x)A\wedge B$	($\rightarrow$I)（证毕）

四　演绎定理

演绎定理是谓词演算中的重要定理。我们讲过，蕴涵式一般都相当于推理形式，但是一个正确的推理如果是以狭谓词演算作工具进行的，那么，与其形式相当的蕴涵式是否就必然是狭谓词演算的一个定理？演绎定理就是要从理论上对这问题给予说明。简单地说：

设在狭谓词演算中给定公式 $A_1, A_2, \cdots, A_m$（$m>0$），并令 $A=A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_m$，如果从A可以推演出公式B，并且在推演过程中A里的自由变项保持不变，另外（$A\longrightarrow B$）为合式公式，那么，（$A\longrightarrow B$）就是谓词演算中的一个普遍有效公式。所谓“在推演过程中A里的自由变项保持不变”就是在推演过程中，对于自由出现在一切依赖A的公式里的变项（命题的、谓词的、个体的）未曾引用变项代入规则、前件存在规则及后件概括规则。演绎定理可以简化谓词演算中定理的证明。例如，在证明$(x)(F(x)\longrightarrow G(x))\longrightarrow((x)F(x)\longrightarrow(x)G(x))$时，如果从公理出发直接应用推理规则去证明，证明将很繁冗；应用演绎定理后，证明的步骤就会减少。我们具体说明如下：

演绎定理（一）

定理　如果Γ是合式公式的集合，A和B是合式公式，并且Γ∪{A}⊢B，那么Γ⊢（A⟶B）。

证明：通过对形成由Γ∪{A}演绎出B的序列中的合式公式的数目施归纳来证明这个定理。

基始步骤　假设这个序列只有一个元素，那么这个元素一定是B本身，而且B或者是命题逻辑系统的公理，或者是Γ∪{A}的元素。

情况1：B是公理。于是由Γ演绎出（A⟶B）如下：

①B	（命题逻辑公理）
②B⟶（A⟶B）	（T_{41}）
③（A⟶B）	（①，②分离规则）

情况2：B是Γ的元素。证明Γ⊢（A⟶B）的演绎如下：

①B	（Γ的元素）
②B⟶（A⟶B）	（T_{41}）
③（A⟶B）	（①，②分离规则）

情况3：B是A。命题公理推理系统中T_2：（A⟶A）。所以我们可以把（A⟶A）从Γ演绎出来，而（A⟶A）也可写成（A⟶B）。因此在这一情况下我们有Γ⊢（A⟶B）。

归纳步骤　假设由Γ∪{A}得出B是有n个元素的序列，在这里n＞1，并且假设这个定理对于有少于n个元素的序列成立。于是有下述4种情况需要考察。

情况1：B是命题逻辑的公理。这正是基始步骤的情况1，于是证明了Γ⊢（A⟶B）。

情况2：B是Γ的元素。这正是基始步骤的情况2，于是证明了Γ⊢（A⟶B）。

情况3：B是A。这与基始步骤步的情况3相同，于是有Γ⊢（A⟶B）。

情况4：B是由演绎中前面的两个合式公式借助分离规则得到的。这两个公式一定有形式B和（C⟶B），并且它们每一个都一定可通过有少于 n 个的元素的序列由 $\Gamma\cup\{A\}$ 演绎出来。在每一场合刚好省略掉原来演绎中的后面的元素而剩下的是所需要的序列。我们有 $\Gamma\cup\{A\}\vdash B$ 和 $\Gamma\cup\{A\}\vdash(C\longrightarrow B)$，并且应用归纳假设有 $\vdash(A\longrightarrow C)$ 和 $\Gamma\vdash(A\longrightarrow(C\longrightarrow B))$。

我们可以把所要求的由Γ得出B的演绎给出如下：

(1)
⋮
(K)　(A⟶C))　由Γ得出（A⟶C）的演绎，

(k+1)
⋮
(L)　(A⟶(C⟶B)　由Γ得出（A⟶(C⟶B))的演绎，

(L+1)（A⟶（C⟶B））⟶（（A⟶C）⟶(A⟶B)）（T_{23}），

(L+2)（A⟶C）⟶（A⟶B）　（L，L+1，分离规则），

(L+3)（A⟶B）　（K，L+2，分离规则），

所以，$\Gamma\vdash(A\longrightarrow B)$ 对所有四种情况都成立。

演绎定理（二）

定理：设在狭谓词演算中给定公式 A_1，A_2，…，A_m（$m>0$），并令 $A=A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_m$，如果从A可以推演出公式B，并且在推演过程中A里的自由变项（命题的、谓词的、个体的）保持不变（即不能应用变项代入规则、前件存在规则和后件概括规则），另外（A⟶B）为合式公式，那么，（A⟶B）就是谓词演算中的一个普遍有效公式。

此定理的证明比较复杂，大致情况是：

设给定一个从A得B的推演由以下一系列公式组成，并且A

中自由变项保持不变。

$\{E_k\}: E_1, E_2, \cdots, E_n(=B)$

我们可以将此推演的每一公式前都加上"A ⟶"：$\{A \longrightarrow E_k\}: A \longrightarrow E_1, \cdots, A \longrightarrow E_n (= A \longrightarrow B)$。

这一系列的公式如果加以适当的补充和整理，最后必然可以得到$(A \longrightarrow B)$的证明。

演绎定理的意义

(一)狭谓词演算是逻辑系统，它是我们推理和证明的理论基础和工具。如果我们要研究某个一阶公理系统的性质，例如初等数论的一致性和完全性，我们就必须明确在此公理系统里进行推理和证明的逻辑工具是什么，就有必要把这数学理论和狭谓词演算结合起来，成为一个整体。这样，在这公理系统里的推理就是以狭谓词演算为工具，以这系统的公理为前提的推理。由于这系统的公理里没有谓词变项和自由个体变项，这种有前提的推理也必然是限制的推理。根据演绎定理，这种推理如果是合乎推演规则的，那么它的形式必然是狭谓词演算的定理，即相当于一个普遍有效的蕴涵式。这也就是说，推理的结果是公理系统合乎逻辑的结论或是可以成立的定理。

(二)通过对狭谓词演算中推演规则和演绎定理的研究，可以更明确理解等值和"可互推"这两个逻辑关系的区别。设公式A和B等值，即A和B同真同假。用符号表示是：$A \longleftrightarrow B$。但是"可互推"的定义是：两公式A和B可互推，如果根据狭谓词演算的推理规则，从A可以推B并且从B可以推A。用符号表示是：$A \vdash\dashv B$。显然，等值是较强的关系，等值的两个公式可以互推，但是可互推的公式却不一定等值。用符号表示是：

$$(A \longleftrightarrow B) \longrightarrow (A \vdash\dashv B)$$

例1.公式p和¬p可以互推。从p经过代入可以得¬p；从¬p经过代入可以得¬¬p即p。但是p和¬p并不等值，它们的真值

正好相反。

例2.公式（x）A（x）和A（y）也是可以互推的。据公理5：（x）F（x）⟶F（y），可得（x）A（x）⟶A（y）。反过来，从A（y）经过概括和约束个体变项易字，又可推出（x）A（x），但是这种推出并不表明A（y）⟶（x）A(x)成立，而且这个公式并不是定理。因此（x）A（x）⟷A(y)并不成立，（x）A（x）和A（y）并不等值。

由此可见，A和B可以互推时并不一定等值。在例二中，根据狭谓词演算的概括规则，如果A和B可以互推并且A为普遍有效公式，那么B也为普遍有效公式，反之亦然。这就是说，设A和B可互推，那么A普遍有效的充分必要条件是B普遍有效。至于等值关系则更强，如果A和B等值，则不但作为公式的整体，A和B在推导中可以相互代替，而且根据基本置换规则，作为某公式的一部分也可以相互置换。正象重言式和重言等值式不是全等概念一样，普遍有效式和普遍有效等值式也不是全等概念。A⟷B说明：此式作为整体是重言式或普遍有效式，其中A和B可是也可不是重言式或普遍有效式，但它们彼此等值则是绝对的。A ⊢⊣ B说明：A和B可以互推，但并不一定等值，只要A(或B）是重言式或普遍有效式（或非重言式、非普遍有效式），就能推出B（或A）是重言式或普遍有效式（或非重言式、非普遍有效式）。

五 范式

和前面讲的命题逻辑的公式一样，谓词逻辑的公式也有范式。谓词逻辑的范式可以显示出谓词公式的一些重要性质，这为某些类型的谓词公式的判定问题的解决提供了工具。我们讨论两种范式：前束范式和司寇伦范式。

（一）前束范式　量词都非否定地处于公式最前方，并且其

辖域都延伸至公式末端的狭谓词演算公式，称作 前束 范 式。例如：

$$(x)(F(x)\longrightarrow G(x))$$

$$(x)(\exists y)(R(x,y)\longrightarrow R(y,y))$$

都是前束范式。这种范式的优点在于：当对谓词演算作一般性的研究时，在量词以后的整个表达式可以当作命题演算中的复合命题处理。前束范式有一存在定理：狭谓词演算的每一公式都有前束范式，而某公式的前束范式不是唯一的。关于求前束范式的方法，我们可以根据下述一些定理，把量词逐步前移，最后移至公式的前方。

1.消除量词否定。凡是带有否定$\neg$的量词，都要消除此否定$\neg$。消除根据是如下两条定理：

T_{-10}：$\neg(x)F(x)\longleftrightarrow(\exists x)\neg F(x)$，

T_{-12}：$\neg(\exists x)F(x)\longleftrightarrow(x)\neg F(x)$。

这种消除方法，只要用上述等值式中右侧的公式置换左侧带否定量词的公式即可。

2.相同量词易字。对于带有相同变项的量词，可以根据约束变项易字的规则，对其逐步易字以达到所有量词中的变项都不采用相同字母。但是如果可以引用下面定理：

T_{-26}：$(\exists x)F(x)\vee(\exists x)G(x)\longleftrightarrow(\exists x)(F(x)\vee G(x))$，

T_{-5}：$(x)F(x)\wedge(x)G(x)\longleftrightarrow(x)(F(x)\wedge G(x))$。

就可以用右侧的公式置换左侧带有相同变项量词的公式，而不采用约束变项易字的方法。

3.消除某种等值式。有某种等值式只是部分公式含有量词，这时需要把此等值消除，根据：

T_{37}：$(p\longleftrightarrow q)\longleftrightarrow(p\longrightarrow q)\wedge(q\longrightarrow p)$，

T_{44}：$(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$。
这种消除的目的在于为下一步的量词逐渐前移做出准备。

4.量词逐渐前移。根据下述定理：

关于析取

T_{-11}：$p \vee (x)F(x) \longleftrightarrow (x)(p \vee F(x))$，

T_{-29}：$p \vee (\exists x)F(x) \longleftrightarrow (\exists x)(p \vee F(x))$，

T_{-26}：$(\exists x)F(x) \vee (\exists x)G(x) \longleftrightarrow (\exists x)(F(x) \vee G(x))$；

关于合取

T_{-20}：$p \wedge (x)F(x) \longleftrightarrow (x)(p \wedge F(x))$，

T_{-28}：$p \wedge (\exists x)F(x) \longleftrightarrow (\exists x)(p \wedge F(x))$，

T_{-5}：$(x)F(x) \wedge (x)G(x) \longleftrightarrow (x)(F(x) \wedge G(x))$；

关于蕴涵

T_{-21}：$p \longrightarrow (x)F(x) \longleftrightarrow (x)(p \longrightarrow F(x))$，

T-加$_1$：$(x)F(x) \longrightarrow p \longleftrightarrow (\exists x)(F(x) \longrightarrow p)$，

T_{-22}：$(\exists x)F(x) \longrightarrow p \longleftrightarrow (x)(F(x) \longrightarrow p)$，

T-加$_2$：$p \longrightarrow (\exists x)F(x) \longleftrightarrow (\exists x)(p \longrightarrow F(x))$。

仍然用上述等值式中右侧的公式直接置换左侧的公式，并且不厌其烦地逐渐进行置换，达到最终将量词逐步向左前移到全公式的最前方，并使其辖域都延伸到全公式的最右端。

下面我们求几个谓词公式的前束范式。

例1. 求$F(x) \vee \neg(y)G(y)$的前束范式。

①$F(x) \vee (\exists y)\neg G(y)$　　（T_{-10}）

②$(\exists y)(F(x) \vee \neg G(y))$　　（T_{-29}）（求得）

例2. 求$(\neg(\exists x)F(x) \vee (x)G(x)) \wedge (p \longrightarrow (x)H(x))$的前束范式。

①$((x)\neg F(x) \vee (x)G(x)) \wedge (p \longrightarrow (x)H(x))$

（T_{-12}）

②$((x)\neg F(x)\vee(x)G(x))\wedge(x)(p\longrightarrow H(x))$

(T_{-21})

③$((y)\neg F(y)\vee(x)G(x))\wedge(x)(p\longrightarrow H(x))$ (R_{4-1})

④$(x)((y)\neg F(y)\vee G(x))\wedge(x)(p\longrightarrow H(x))$ (T_{-11})

⑤$(x)(((y)\neg F(y)\vee G(x))\wedge(p\longrightarrow H(x)))$ (T_{-5})

⑥$(x)((y)(\neg F(y)\vee G(x))\wedge(p\longrightarrow H(x)))$ (T_{-11})

⑦$(x)(y)((\neg F(y)\vee G(x))\wedge(p\longrightarrow H(x)))$ (T_{-20})（求得）

例3.求$(x)(F(x)\longrightarrow G(x))\longrightarrow(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$的前束范式。我们可以采取两种不同的步骤来求，并且从中可以看出：由于步骤不同，所得前束范式也不同。

第一种：

①$(x)(F(x)\longrightarrow G(x))\longrightarrow(\exists y)(F(y)\wedge G(y))$ (R_{4-1})

②$(\exists x)(\exists y)((F(x)\longrightarrow G(x))\longrightarrow(F(y)\wedge G(y)))$（T-加$_1$，T-加$_2$）（求得）

第二种：

①$\neg(x)(\neg F(x))\vee G(x))\vee(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$ (D_1)

②$(\exists x)(F(x)\wedge\neg G(x))\vee(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$ $(T_{-10}, D\cdot M)$

③$(\exists x)((F(x)\wedge\neg G(x))\vee(F(x)\wedge G(x)))$ (T_{-26})

④$(\exists x)(F(x)\wedge(\neg G(x)\vee G(x)))$（化简）

⑤$(\exists x)F(x)$（化简）（求得）

可以看出，求前束范式的步骤不同，得到的前束范式也不同。不管怎样，我们求得一个公式的前束范式以后，都可以将量词后的整个表达式当作命题演算中的复合命题来看待。但是，我们从上例中也可看到，前束量词可以有许多不同的排列方法，因此就得到不同形式的前束范式，这对我们研究谓词演算的判定问题很不方便。如果能得到一种特定类型的范式，使我们考虑问题的范围能进一步缩小，那会对我们研究谓词演算的判定问题有所帮助。下面我们就介绍司寇伦范式。

（二）司寇伦范式　对于谓词公式A而言，如果它的前束范式是B，并且B中无自由个体变项，至少有一存在量词而且所有存在量词都在全称量词之前，那么我们就称前束范式B是公式A的司寇伦范式。例如：

$(\exists x)(\exists y)(z)(F(x,y,z)\wedge G(x,y,z)\longrightarrow H(x,y,z))$ $(\exists x)(\exists y)(z)(H(x,y,z)\longleftrightarrow F(x,y,z)\vee G(x,y,z))$ 就都是司寇伦范式。相反

$(\exists x)(y)(F(x,y)\wedge G(x,y,z))$　（其中有自由个体变项z）

$(x)(F(x)\longrightarrow G(x))$　（其中无存在量词）

$(x)(\exists y)((F(x)\longrightarrow G(x))\longrightarrow F(y)\wedge G(x))$

（其中全称量词在存在量词之前）

这些就不是司寇伦范式。

司寇伦范式的存在定理　任何狭谓词公式A都有一个司寇伦范式B，而且A和B是可以互推的，即$A\vdash\dashv B$，A的普遍有效性是B的普遍有效性的充分和必要条件。下面进行证明。

对于狭谓词公式A而言，大致有如下情况：

1.狭谓词公式A必定有一前束范式B_1，并且$A\vdash\dashv B_1$。如果B_1中无自由个体变项，至少有一存在量词并且所有存在量词都在全称量词之前，那么B_1就是A的司寇伦范式。否则还不是，

还要继续寻求。

2.如果B_1中有m个自由个体变项，即θ_1，θ_2，…，θ_m，则可用概括规则得到B_2，这时

$B_2 = (\theta_1)(\theta_2)\cdots(\theta_m)B_1$　　　　$(m \geqslant 0)$

于是B_1和B_2可以互推，具体说：

(1)假设$B_1(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$。

(2)用概括规则得$(\theta_1)(\theta_2)\cdots(\theta_m)B_1(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$。这就是$B_2$，因此$B_1 \vdash B_2$。从另一方面，

(1)假设$(\theta_1)(\theta_2)\cdots(\theta_m)B_1(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$，

(2)据公理五等得$(\theta_1)(\theta_2)\cdots(\theta_m)B_1(\theta_1, \theta_2\cdots, \theta_m) \longrightarrow B_1(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$，

(3)由分离规则得$B_1(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$。

这说明$B_2 \vdash B_1$。如果B_1中没有自由个体变项，则B_2就是B_1。

3.如果B_2中只有命题变项而无谓词变项，即B_2是一个命题公式，就可以引用复合命题等值式

$p \longleftrightarrow (\exists x)((F(x) \vee \neg F(x)) \wedge p)$

这个公式就是引进一个处于最前方的存在量词。它来自这样的推导：

(1)据T_{-28}得$p \wedge (\exists x)F(x) \longleftrightarrow (\exists x)(p \wedge F(x))$，

(2)谓词代入得$p \wedge (\exists x)(F(x) \vee \neg F(x)) \longleftrightarrow (\exists x)(p \wedge (F(x) \vee \neg F(x))$，

(3)消除，得$p \longleftrightarrow (\exists x)((F(x) \vee \neg F(x)) \wedge p)$。

4.如果B_2不是司寇伦范式，那么假设B_2中的$A(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$，其中$n \geqslant 0$，$x_1$，$x_2$，…，$x_n$，y是自由个体变项。$B_2$可能有如下两种情况：(1)全称量词(y)之前无存在量词，在其后也无存在量词；(2)全称量词(y)之后只有k-1个全称量词出现在存在量词之前。于是我们可以证明，由上述两种情况

能够求得一前束范式B_3，B_2和B_3可以互推，即$B_2 \vdash\dashv B_3$。就是说，如果是情况（1），那么根据上面的等值式$p \longleftrightarrow (\exists x)((F(x) \vee \neg F(x)) \wedge p)$

则B_3最前方可以引入一存在量词，即B_3成为一个司寇伦范式。如果是情况（2），经过k次这样的转换，就可以得到司寇伦范式。为了得到B_3，我们现在先构造一个B^*如下：

$(\exists x_1)(\exists x_2)\cdots(\exists x_n)((\exists y)(A(x_1, x_2, \cdots, y) \wedge \neg S(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)) \vee (z) S(x_1, x_2, \cdots, x_n, z))$其中

S（…）是在A中不出现的谓词变项，z是在A中不出现的个体变项。于是我们证明下述情况。

5. B_2和B^*可以互推，即$B_2 \vdash\dashv B^*$。

6. B_3和B^*也可以互推，即$B_3 \vdash\dashv B^*$。

这种可以互推的具体证明，我们在此从略。总之它们都证明了司寇伦范式存在定理的成立。下面具体求$(\exists x)(y)(\exists z)H(x, y, z)$的司寇伦范式。

此处的A（x，y）是$(\exists z)H(x, y, u)$。作一构造式：

$(\exists x)((\exists y)((\exists u)H(x, y, u) \wedge \neg S(x, y)) \vee (z)S(x, z))$

再将$(\exists y)$，$(\exists u)$前移，则得：

$(\exists x)(\exists y)(\exists u)((H(x,y,u) \wedge \neg S(x,y)) \vee (z)S(x, z))$

再将（z）前移，则得

$(\exists x)(\exists y)(\exists u)(z)((H(x,y,u) \wedge \neg S(x,y)) \vee S(x, z))$。

最后一式就是原谓词公式的司寇伦范式。

六 元逻辑问题

所谓元逻辑问题，就是把逻辑本身作为研究对象，考察其内在的逻辑问题。对于谓词逻辑的元逻辑问题，我们讨论的仍然

是：推理系统是否一致？推理系统是否完全？公理和推理规则相对于公理系统是否独立？

（一）一致性

一致性也称相容性、协调性、可靠性或无矛盾性。一个逻辑系统或理论系统如果是内含逻辑矛盾的，那么这个系统就不可靠；而不可靠的系统还有什么意义呢？我们肯定，谓词演算系统是一致的，它不可能推出逻辑矛盾，因此也是可靠的逻辑系统。

定理一　在谓词演算系统里，不可能有一公式A，并且A和¬A都是在演算系统里可证的。这个定理是说，在谓词演算系统里A与¬A不能同时都真，即该系统是无矛盾的。

定理二　在谓词演算系统里，有一公式A，A在演算系统里是不可证的。这个定理是说，对于谓词演算系统而言，并非任何公式都是可以证明的，否则的话A和¬A就都可以证明了，就会出现逻辑矛盾。

一致性定理的证明可以应用归谬法：在谓词演算里，如果存在一公式A，A与¬A都是可证的，而且B是任意公式（包括极其荒谬的命题或假命题），那么B就是可证的。因为

①A可证，¬A也可证　（假设）

②$A\wedge\neg A$　（合取构成T_{21}：$p\longrightarrow(q\longrightarrow p\wedge q)$）

③$\neg A\vee A$　（附加定理T_{10}：$p\longrightarrow q\vee p$）

④$\neg A\vee A\vee B$（T_{10}）

⑤$\neg(A\wedge\neg A)\vee B$　（D·M律）

⑥$A\wedge\neg A\longrightarrow B$　（$\longrightarrow$定义）

⑦B（假命题）　（②，⑥分离）

为了便于证明谓词演算系统的一致性，我们先给谓词演算系统以某种算术解释，从而使谓词演算系统的一致性问题转换成算术演算中的一致性问题。一个命题或一个形式系统是否真实，单说形式本身是不能检验的，必须给它赋予某种意义才能检验。因

此，在给予谓词演算以具体解释下，所有普遍有效公式都具有性质Φ，这样就需证明：第一，所有谓词演算的公理都具有性质Φ；第二，如果前提具有性质Φ，那么应用推理规则于这些前提，所得结论也应具有性质Φ；第三，A与¬A不能同时都具有性质Φ。于是，一致性问题就得到了证明。为便于元逻辑证明，我们考虑的对象域只是在有限的范围内。如果论域只有一个个体，则我们就把谓词演算的一切量词销去，用相同的命题变项代替相同的谓词变项，从而把谓词演算的公式转换为命题演算的公式来讨论。这时只取真假二值（1，0）。

第一，所有谓词演算的公理都具有性质Φ（即永真性，Φ≡1），换句话说，公理都是重言式或普遍有效式。下面进行证明：

公理（1），（2），（3），（4）都是重言式，这在命题演算中已经证明。现在主要是公理（5）、（6）。

公理（5）是全称列举：$(x)F(x) \longrightarrow F(y)$，简化后变为$F(a) \longrightarrow F(a) = p \longrightarrow p = \neg p \vee p \equiv 1$。

公理（6）是列举存在：$F(y) \longrightarrow (\exists x)F(x)$，简化后变为$F(a) \longrightarrow F(a) = p \longrightarrow p = \neg p \vee p \equiv 1$。

因此，所有谓词演算的公理都具有性质Φ。

第二，如果前提具有性质Φ，那么应用推理规则于这些前提，所得结论也应具有性质Φ。下面进行证明：

1.代入规则　代入分三种情况：命题变项代入，自由个体变项代入，谓词变项代入。现在分别证明这些代入后的结果都具有性质Φ。

（1）命题变项代入规则　其图式为：

如果$A(\mu)$，那么$A(\mu/B)$。

图式中$A(\mu)$表示公式A中有命题变项μ，其取值只能是真和假（1和0）。$A(\mu/B)$表示对A中的所有μ都代之以B，当然B

取值也只能是真和假。如果A（μ）≡1，是永真的，即上面图式的永真性与它的形式结构有关，而不与其命题变项的表达符号有关。因此用B代μ，B也只能取值为真和假。A（μ/B）≡1。

（2）自由个体变项代入规则　其图式为：

如果A（θ），那么A（θ/θ'）。

这个图式也可以推出：

如果A（θ）≡1，那么A（θ/θ'）≡1。

这是因为A（θ）=A（a）=A（θ'）≡1。即这个图式都可化为相同的命题变项。

（3）谓词变项代入规则　其图式（简化）为：

如果A（Ω），那么A（B）。

这个图式也可以推出：

如果A（Ω）≡1，那么A（B）≡1。

这是因为Ω和B都是谓词，它们只能取值为真和假，而且Ω（θ_1，…，θ_n）和B（θ_1，…，θ_n；θ_{n+1}，…，θ_{n+m}）具有一定的对应关系，因此，从永真式只能得到永真式。

2.分离规则　其图式为：

从A和A⟶B，可得B。

由这个图式可以推出，因为A≡1，而且A⟶B=¬A∨B≡1，得到¬A∨B=¬1∨B=0∨B，所以B≡1。

3.前存后概规则（也称量词推演规则）　这里分为前件存在规则和后件概括规则。

（1）前件存在规则　其图式为：

从A（θ）⟶B，可得（$\exists_\theta$）A（θ）⟶B。这个图式也可以推出：

从A（θ）⟶B=¬A（θ）∨B≡1，

可得（$\exists_\theta$）A（θ）⟶B=¬（$\exists\theta$）A（θ）∨B≡1。

这里因为¬A（θ）∨B=¬A（a）∨B≡1，而¬（$\exists_\theta$）A（θ）

$\vee B = \neg A(a) \vee B \equiv 1$，所以前后一致。

(2)后件概括规则　其图式为：

从$A \longrightarrow B(\theta)$，可得$A \longrightarrow (\theta) B(\theta)$。

由这个图式我们可以推出，由于$\neg A \vee B(\theta)$具有性质Φ，所以$\neg A \vee B(\theta) \equiv 1$，而$\neg A \vee B(\theta) = \neg A \vee B(a) \equiv 1$，对于$A \longrightarrow (\theta) B(\theta)$来说，把它简化后，$\neg A \vee (\theta) B(\theta) = \neg A \vee B(a) \equiv 1$，所以，它也具有性质Φ。

4.约束个体变项易字规则　其图式为：

如果$A(\theta)$，那么$A(\theta/\theta')$。

当然，这里的A中是包含量词的，如果我们把它展开来写，也可成为：

如果$(\theta) A(\theta)$或$(\exists\theta) A(\theta)$，

那么$(\theta') A(\theta')$或$(\exists\theta') A(\theta')$。

可以看出，若前提具有性质Φ，简化后命题$A(a)$也具有性质Φ，而后者结论简化后也为命题$A(a)$，所以它必然具有性质Φ。

5.现在证明A与$\neg A$不能同时具有$\Phi \equiv 1$的性质。证明：

如果$A \equiv 1$，那么$\neg A \equiv 0$；

如果$A \equiv 0$，那么$\neg A \equiv 1$。

因此，A与$\neg A$不能同时具有性质$\Phi \equiv 1$。

上述对于谓词演算系统一致性的证明，我们采用了与谓词演算相对应的简化了的命题演算形式，即当个体域只有一个对象时，经过转换而得到相应的命题演算形式。这种简化方法可以方便对问题的研究，而且只要将其渐次扩展开来，就可以使研究结果成为普遍化结论。

(二)完全性

完全性或完备性对于逻辑系统而言不是非有不可的，这跟一致性非有不可是有所差别的。就是说，作为一个逻辑系统必须是

一致的即没有逻辑矛盾的，但不一定是完全的，尽管具有完全性的系统是更理想的系统。狭谓词演算具有完全性。狭谓词演算的完全性早在1928年已由哥德尔予以证明，因此被称为哥德尔完全性定理。完全性包括三种：语义完全性（又称广义完全性，或相对完全性），语法完全性（又称狭义完全性，或绝对完全性），古典完全性。狭谓词演算并不具备古典完全性，因为在狭谓词演算中有的公式，例如A和¬A可以都不是普遍有效的，这样，在狭谓词演算中就推不出来即都不可证；但是古典完全性则要求对于任一合式公式A而言，或者A是可证的，或者¬A是可证的。狭谓词演算　不具备语法完全性，因为在狭谓词演算中把一个推不出的公式加到公理中去，并不能使该系统中的一切公式都可证；但是语法完全性则要求如果把一个推不出的公式加到公理中去，则该系统中的一切公式都可证，当然包括极其荒谬的命题也可证，因此会出现逻辑矛盾而造成不一致。狭谓词演算具有语义完全性。

语义完全性定理　对于狭谓词演算中任一合式公式A，如果A是普遍有效的，则证明A在该系统中是可推出的即可证的；如果A不是普遍有效的，则证明¬A是可满足的。下面进行证明。

设A的司寇伦范式为S_A，其一般形式为：

$(\exists x_1)\cdots\cdots(\exists x_m)(y_1)\cdots\cdots(y_n)B(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m)$其中m，n$\geqslant 0$。

我们知道，狭谓词演算中的任一合式公式A都可以转换为它的司寇伦范式S_A，而且A与S_A可以互推，而推理规则又能保障这种互推中的普遍有效性的实现，因此我们讨论A的可推出或可证性以及可满足性，就可以转换成对S_A的可推出或可证性以及可满足性的讨论。

先说S_A的可推出或可证性。这需要先判定S_A的普遍有效性，为此把S_A转换为比较具体的一系列不带量词的公式。我们先为

S_A中谓词的变目式构造个体变项组，设个体变项的序列为：x_0，x_1，x_2，…。为了跟S_A的存在量词个数m相对应，可把无穷个体域的自由个体变项编成无穷多个可数的m项组。例如当m＝3时，m项组之一就是x_0，x_2，x_0。而所谓可数就是能够把这些m项组按一定次序排列下去。这种排列，先按足码之和的增长排，再按字典顺序排列相同足码内的顺序。为了跟S_A的全称量词个数n相对应，在每一m项组后加一n项组，于是构成m＋n项组的无穷序列。有了这种变项组，就可以构造不带量词的公式如下：

B_1　　$B(x_0, \cdots, x_0; x_1, \cdots, x_n)$

B_2　　$B(x_0, \cdots, x_0, x_1; x_{1+n}, \cdots, x_{2n})$

…　　…　　……

B_i　　$B(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}; x_{(i-1)n+1}, \cdots, x_{in})$在这当中，i可以是任意大的一个自然数。这样构造的$B_1$，$B_2$，…，$B_i$等公式可以有无穷多个，而每一个公式都表明$S_A$中包含的m＋n个自由个体变项排列的一种可能性。我们设：

$$C_i = B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_i。$$

如果S_A为：$(\exists x_1)(\exists x_2)(y_1)(Fx_1 \longrightarrow (Gy_1 \longrightarrow Fx_2))$，其中m＝2，n＝1。当i＝3时，有：

B_1　　$Fx_0 \longrightarrow (Gx_1 \longrightarrow Fx_0)$

B_2　　$Fx_0 \longrightarrow (Gx_2 \longrightarrow Fx_1)$

B_3　　$Fx_1 \longrightarrow (Gx_3 \longrightarrow Fx_0)$

$C_i = B_1 \vee B_2 \vee B_3$。

由此可以看出，C_i中没有量词，如果把C_i中不同的谓词变项看作是不同的命题变项，把相同的谓词变项但有不相同的变目式也看作是不同的命题变项，于是C_i就成了命题演算的一个公式，这样对于任一特定的自然数i，C_i或者是一个重言式，或者不是一个重言式，二者必居其一而且只居其一。这在命题演算中是可以证明的。因此，对C_i就有如下的两种可能性：

第一种：存在一个i，使得C_i是命题演算中的重言式；

第二种：不存在一个i，使得C_i是命题演算中的重言式。

如果第一种情况成立，那么就会证得S_A可以由谓词演算的公理系统中推出，即S_A可证，任意普遍有效公式A也可证。如果第二种情况成立，那么C_i不是一重言式，说明S_A的否定是可满足的。通过对这两种情况的详细证明（在此从略），狭谓词演算的语义完全性定理得证。

（三）独立性

在公理系统中某一公理A是否能从该系统中其余的公理中推演出来，如果能从其余的公理中推演出来，则A不是独立的；如果不能从其余的公理中推演出来，则A就是独立的。如果设A是一个不属于谓词演算公理系统中的一个公式，在证明时先给谓词演算以具体解释。当谓词演算系统不包含公式A时，它推演出的公式都具有性质Φ；谓词演算系统不包含公式A，它是一致的，无矛盾的，它不能推演出任一公式B。但是，如果谓词演算系统包含了公式A时，它能推演出任一公式B，其中当然包含极荒谬的命题，因此是不一致的、矛盾的。因为关于公理（1）、（2）、（3）、（4）即A_1、A_2、A_3、A_4的独立性问题，已在命题逻辑部分中证过；现只证公理（5）、（6）即A_5、A_6的独立性问题。

1.A_5：$(x)F(x)\longrightarrow F(y)$。如果证得$A_1$——$A_4$及$A_6$再加上推理规则之后，推出的公式都具有性质Φ，而$A_5$推出的公式不具有性质Φ，那么就证得了$A_5$是独立的。

（1）假设把公式作如下变换：

$(x)A(x)$变成$(x)A(x)\vee\neg p\vee p$

$(\exists y)A(y)$变成$(\exists y)A(y)\vee\neg p\vee p$

它们仍然是谓词演算中的可推出公式，都具有性质Φ。经过这种变换后，很明显A_1—A_4及A_6不受影响，仍具有性质Φ。就以A_6

来说，经过变换后所得：

$F(y) \longrightarrow (\exists x) F(x) \vee \neg p \vee p$明显是可推出公式，因为后件是永真的、所以整个公式是：

$(F(y) \longrightarrow (\exists x) F(x) \vee \neg p \vee p) = \Phi \equiv 1$。

（2）从推理规则看，代入规则、分离规则和约束变项易字规则等都不受上述变换的影响。关于前存后概规则（也称量词推演规则）也可具体分析如下：

前件存在规则：从$A(\theta) \longrightarrow B$，可得$(\exists\theta) A(\theta) \longrightarrow B$。按照上述变换情况，可以得出：

从$A(\theta) \longrightarrow B$，可得$(\exists\theta) A(\theta) \vee \neg p \vee p \longrightarrow B$。十分明显，其性质不受变换的影响，仍具有性质Φ。

后件概括规则：从$A \longrightarrow B(\theta)$，可得$A \longrightarrow (\theta) B(\theta)$。按照上述变换情况，可以得出：

从$A \longrightarrow B(\theta)$，可得$A \longrightarrow (\theta) B(\theta) \vee \neg p \vee p$。其性质也不受变换的影响，仍具有性质Φ。

（3）但是，唯独A_5经过上述变换后得到的公式，不具有性质Φ。具体说明如下。

A_5：$(x) F(x) \longrightarrow F(y)$，变换后为

$$(x) F(x) \vee \neg p \vee p \longrightarrow F(y)。$$

我们可以证出，$(x) F(x) \vee \neg p \vee p \longrightarrow F(y)$在谓词演算公理系统中推不出来，即不可证，因为它不具有性质Φ即不是普遍有效公式。

证明：（用归谬法）

① $(x) F(x) \vee \neg p \vee p \longrightarrow F(y)$ （假设）

② $\neg p \vee p$ （T_3）

③ $\neg p \vee p \vee (x) F(x)$ （附加）

④ $(x) F(x) \vee \neg p \vee p$ （交换）

⑤ $F(y)$ （④，①，分离）

⑥ $\neg F(y)$ （谓词代入）

⑦ 并非① （⑤，⑥矛盾）（证毕）

因此，A_5是独立的。

（3）同样，A_6也具有独立性。对于这种独立性的证明，我们采取不全同于A_5独立性的证明方法。就是说，A_6独立性的证明方法是：A_1——A_5加上推理规则推出来的公式都具有性质Φ，唯独A_6推出的公式不具有性质Φ，所以A_6是独立的。必须看到，我们的目的是要证明独立性，而要达到这个目的，其方法是可以不同的，也就是说，可以采用不同的构造方式以证明独立性问题。A_6独立性的具体证明步骤：由其他公理推出来的公式都具有性质Φ；可以把公式作如下的变换：$(x)A(x)$变换成$(x)A(x)\wedge\neg p\wedge p$，$(\exists_y)F(y)$变换成$(\exists_y)F(y)\wedge\neg p\wedge p$；再证明，$A_1$——$A_5$加上推理规则推出的公式仍然是谓词演算中可以推出的公式，而A_6推出的公式则不是谓词演算中可以推出的公式，因此A_6是独立的。

证明：

首先，按照上述变换方法，A_1——A_5并不受影响，仍具有性质Φ。如：

A_5：$(x)F(x)\longrightarrow F(y)$，

变换后为：$(x)F(x)\wedge\neg p\wedge p\longrightarrow F(y)$。变换后的公式，其前件永假，整个公式则永真，因此具有性质Φ。

各条推理规则经变换后也不受影响。如：

前件存在规则：从$A(\theta)\longrightarrow B$，可得$(\exists_\theta)A(\theta)\longrightarrow B$。按照上述变换情况，可以得出：

从$A(\theta)\longrightarrow B$，可得$(\exists_\theta)A(\theta)\wedge\neg p\wedge p\longrightarrow B$。很明显，$(\exists_\theta)A(\theta)\wedge\neg p\wedge p\longrightarrow B$仍是谓词演算中可推出的公式，即可证公式。但是，

A_6：$F(y)\longrightarrow(\exists_x)F(x)$，

变换后为：$F(y)\longrightarrow(\exists x)F(x)\wedge\neg p\wedge p$。变换后的公式，在谓词演算的公理系统中并推不出来。具体证明如下（用归谬法）：

① $F(y)\longrightarrow(\exists x)F(x)\wedge\neg p\wedge p$　　（假设）

② $\neg((\exists x)F(x)\wedge\neg p\wedge p)\longrightarrow\neg F(y)$（易位）

③ $(x)\neg F(x)\vee p\vee\neg p\longrightarrow\neg F(y)$　　（D·M）

④ $\neg p\vee p$　　（T_3）

⑤ $\neg p\vee p\vee(x)\neg F(x)$　　（附加）

⑥ $(x)\neg F(x)\vee p\vee\neg p$　　（交换）

⑦ $\neg F(y)$　　（分离）

⑧ $F(y)$　　（谓词代入）

⑨ 并非①　　（⑦，⑧矛盾）（证毕）

由此可见，$F(y)\longrightarrow(\exists x)F(x)\wedge\neg p\wedge p$不能在谓词演算中推出，即不可证。所以，$A_8$是独立的。

第四章 逻辑代数

如果说现代逻辑的发展成熟阶段是以命题逻辑和谓词逻辑作为基础理论部分的话，那么现代逻辑的早期形成阶段却是以逻辑代数作为基础理论部分。尽管逻辑代数也包括若干命题逻辑的内容，但是它总没有现代命题逻辑那样系统和完备。我们知道，代数是关于运算规则及运算展开的学说。代数与算术不同之处在于它不是对具体数字的运算，而是对符号的运算。如果说普通代数的符号运算还可以只理解成代替各种数字运算，那么逻辑代数的符号运算就不可以这样狭义理解了，它的符号运算代替着更广泛、更一般的各种元素运算（如数字、真值、命题、集合、开关等等）。逻辑代数的创始人是英国数学家乔治·布尔（1815——1864）。布尔认为，由于代数理论的有效性并不依赖于对使用符号所作的解释，而只依赖于符号的结合规律，同时逻辑关系和某些数学运算有类似的性质，如逻辑的概念、命题、推理与代数的字母、方程、变换有某种形式的相似，概念、命题的析取与合取跟数量的加法与乘法有某种相似之处，因此，如果将符号的解释推广到更广泛的逻辑领域，就可以构造成一个思维的演算。逻辑代数就是逻辑史上由布尔第一个提出的逻辑演算。

在逻辑代数中，不做任何具体解释的最抽象的理论体系是布尔代数，它的运算又称作布尔运算。进一步，将布尔代数给以具体应用和解释，比如将布尔运算解释成真值运算，就成为真值代数；解释成命题运算，就成为命题代数；解释成词项运算，就成

为类逻辑代数；解释成集合运算，就成为集合代数；解释成电路运算，就成为开关代数；解释成事件运算，就成为概率代数，等等。人们将上述的具体应用和解释也有统称作布尔代数的，但是这里也要有所区别。

第一节　布尔代数

一　代数含义

布尔代数是一个抽象的代数系统，这个系统在数学上被看成是一个带有若干运算的、元素的集合。这些运算具有一些基本性质，服从一些基本的运算规则。从这些基本运算规则出发，运用演绎推理可以推出其他的运算规则。

我们用字母B来指称布尔代数。B是一个至少含有两个（不同的）特定元素O和I的集合，O和I是常项；我们用x，y，z，x_1，y_1，z_1，…表示B中任意元素的变项；对于B中的元素，存在两个二元运算∪和∩以及一个一元运算一，它们分别称为布尔加法，布尔乘法和布尔求补；B对于这三个运算是封闭的，就是说，对于B中任何元素x和y，x∪y、x∩y及$\overline{x}$作为运算的结果（分别称作布尔和、布尔积、布尔补）都仍是B的元素。此外，B中还包括等号=、不等号≠、括号（　）、条件号⟶和双条件号⟷。

布尔和的写法x∪y，也有写成x+y、x∨y等情况的。布尔积的写法x∩y，也有写成x×y、x∧y、x·y、xy等情况的。布尔补的写法$\overline{x}$，也有写成¬x、~x、x'等情况的。这些写法的实质意义相同。

这三个运算具有下列基本性质：

（一）交换律：〔1〕x∪y=y∪x，〔2〕x∩y=y∩x

（二）分配律：〔3〕x∪(y∩z)=(x∪y)∩(x∪z)

〔4〕$x\cap(y\cup z)=(x\cap y)\cup(x\cap y)$

（三）基元律（也称同一律）：

〔5〕$x\cup O=x$，〔6〕$x\cap I=x$

（四）互补律（也称补元律）：

〔7〕$x\cup\overline{x}=I$，〔8〕$x\cap\overline{x}=O$

（五）结合律〔9〕$(x\cup y)\cup z=x\cup(y\cup z)$

〔10〕$(x\cap y)\cap z=x\cap(y\cap z)$

（六）泛界律（也称0－1律、零一律：

〔11〕$x\cup I=I$，〔12〕$x\cap O=O$

（七）对合律：$\overline{\overline{x}}=x$

（八）德·摩根律（也称D·M律）：

〔13〕$\overline{x\cup y}=\overline{x}\cap\overline{y}$

〔14〕$\overline{x\cap y}=\overline{x}\cup\overline{y}$

（九）幂等律（也称重言律、等幂律）

〔15〕$x\cup x=x$，〔16〕$x\cap x=x$

（十）条件律：〔17〕$x\longrightarrow y=\overline{x}\cup y$

（十一）双条件律：〔18〕$(x\longleftrightarrow y)$

$=(x\longrightarrow y)\cap(y\longrightarrow x)$

$=(x\cap y)\cup(\overline{x}\cap\overline{y})$

如果我们把B解释为由所有整数组成的集合，令O和I分别是0和1，令∪、∩和¯分别是整数的加法、乘法和取负运算，那么容易看出，这种普通的整数代数不构成布尔代数。虽然上述基本性质有些是跟数的运算规律相同，如交换律、结合律、对合律等；但也有一些是不相同的，例如在普通代数中不存在〔3〕、〔7〕和〔8〕，即加法对乘法的分配律和两个互补律，也就是说一般地没有如下情况：

$x+(y\times z)=(x+y)\times(x+z)$，

$x+(-x)=1$，

$x \times (-x)=0$。

上述基本性质或定律可以根据推理规则逻辑地推出其他的性质或定律。人们也把这类基本定律叫做公理或公设，由它们根据各种推理规则可以推出定理。这就是说，布尔代数理论是公理化理论。

二 基本规则

我们可以建立布尔代数的三个基本规则。

（一）代入规则

规则：在一个包含原子P的等式中，如果将所有出现P的位置都代以一个逻辑式A，则等式仍成立。

前述我们已经给出了布尔代数的基本公式，如果再利用代入规则，那就可以将这些等式中的原子用任意逻辑式代替而得到新公式，从而扩大了等式的应用范围。例如由公式〔4〕

$$x\cap(y\cup z)=(x\cap y)\cup(x\cap z),$$

如果将所有出现z的地方都代以另一逻辑式$x_1\cup y_1$，则可得新等式：

$$x\cap(y\cup(x_1\cup y_1)) \quad \text{（代入规则）}$$
$$=(x\cap y)\cup x\cap(x_1\cup y_1) \quad \text{（分配律）}$$
$$=(x\cap y)\cup((x\cap x_1)\cup(x\cap y_1)) \quad \text{（分配律）}$$
$$=(x\cap y)\cup(x\cap x_1)\cup(x\cap y_1) \quad \text{（结合律）}$$

（二）反演规则

规则：设F为一逻辑式，如果将所有的“∩”换为“∪”、“∪”换为“∩”、“O”换为“I”、“I”换为“O”，原子换为其否定、否定换为原子，则这样互换后的结果即为F的否定$\overline{F}$。

其实这个规则就是德·摩根律的推广。例如：

设$F=(\overline{x}\cap\overline{y})\cup(z\cap x_1)$，则

$$\overline{F}=(x\cup y)\cap(\overline{z}\cup\overline{x_1})。$$

设$F = x \cup \overline{y \cup \overline{z} \cup \overline{x_1 \cup y_1}}$，则

$$\overline{F} = \overline{x} \cap (y \cup \overline{z} \cup \overline{x_1 \cup y_1})$$
$$= \overline{x} \cap (y \cup \overline{z} \cup (\overline{x_1} \cap \overline{y_1}))。$$

（三）对偶规则

规则：如果二逻辑式H和G相等，那么它们的对偶式H′和G′也相等。

对偶式H′和G′跟否定式$\overline{H}$和$\overline{G}$一般是不同的，因为H′和G′并不要求将原子和它的否定互换。例如：

$H = (x \cap \overline{y}) \cup (z \cap \overline{x_1})$，则

$H' = (x \cup \overline{y}) \cap (z \cup \overline{x_1})$，而

$\overline{H} = (\overline{x} \cup y) \cap (\overline{z} \cup x_1)$，所以

$H' \neq \overline{H}$。

当然，在极个别情况下也可能出现$H' = \overline{H}$，例如$H = (x \cap \overline{y}) \cup (\overline{x} \cap y)$，那么

$$H' = (x \cup \overline{y}) \cap (\overline{x} \cup y) = (\overline{x} \cup y) \cap (x \cup y) = \overline{H}。$$

和普通代数的恒等变形一样，我们利用上面讲的基本性质和基本规则可以对逻辑式进行恒等变形。这种恒等变形的意义很大，它即可以用来证明某种新的逻辑性质或定理，又可以用来化简逻辑式。

例1．证明逻辑性质(十二)吸收律（编号与前述基本性质接排）：〔19〕$x \cup (x \cap y) = x$，　〔20〕$x \cap (x \cup y) = x$。

证：〔19〕$x \cup (x \cap y) = (x \cap I) \cup (x \cap y)$（基元律）

$= x \cap (I \cup y)$　（分配律）

$= x \cap I$　（泛界律）

$= x$　（基元律）

〔20〕$x \cap (x \cup y) = x \cup (x \cap y)$　（对偶规则）

$= x$　（吸收律〔19〕）（证毕）

例2．求证〔21〕$(\overline{x} \longrightarrow (x \longrightarrow y)) = I$，

〔22〕 $((x\cap y)\longrightarrow x)=I$。

证： 〔21〕 $(\overline{x}\longrightarrow(x\longrightarrow y))=\overline{\overline{x}}\cup(\overline{x}\cup y)$ （条件律）

$=x\cup(\overline{x}\cup y)$ （对合律）

$=(x\cup\overline{x})\cup y$ （结合律）

$=I\cup y$ （互补律）

$=I$ （泛界律）

〔22〕 $((x\cap y)\longrightarrow x)=\overline{(x\cap y)}\cup x$ （条件律）

$=(\overline{x}\cup\overline{y})\cup x$ （D·M 律）

$=(\overline{x}\cup x)\cup\overline{y}$ （交换律、结合律）

$=I\cup\overline{y}$ （互补律）

$=I$ （泛界律）（证毕）

例3. 设$x\cap y=x\cap z$，且$x\cup y=x\cup z$，求证$y=z$。

证：$y=y\cap(y\cup x)$ （吸收律）

$=y\cap(z\cup x)$ （题设）

$=(y\cap z)\cup(y\cap x)$ （分配律）

$=(y\cap z)\cup(z\cap x)$ （题设）

$=z\cap(y\cup x)$ （分配律）

$=z\cap(z\cup x)$ （题设）

$=z$ （吸收律）（证毕）

对于逻辑性质或定理的证明，也可以从布尔代数B集合与其元素的关系上考虑。我们引入符号“$\in$”表示某元素属于某集合，比如$x\in B$，即元素x属于集合B。

例4. 对每一个$x\in B$，若有$y\in B$使得$x\cup y=I$，$x\cap y=O$，则$y=\overline{x}$。（此即说明互补律和—是B上的运算，两者是一致的）

证： $y=y\cap I$ （基元律）

$=y\cap(x\cup\overline{x})$ （互补律）

$=(y\cap x)\cup(y\cap\overline{x})$ （分配律）

$=O\cup(y\cap\overline{x})$ （交换律、假设）

$=(x\cap\overline{x})\cup(y\cap\overline{x})$ （互补律）

$=(\overline{x}\cap x)\cup(\overline{x}\cap y)$ （交换律）

$=\overline{x}\cap(x\cup y)$ （分配律）

$=\overline{x}\cap I$ （假设）

$=\overline{x}$ （基元律）（证毕）

例5．对每一个$x\in B$，$\overline{\overline{x}}=x$。（此即对合律）

证：由互补律，$x\cup\overline{x}=I$，$x\cap\overline{x}=O$。又由交换律，$\overline{x}\cup x=I$，$\overline{x}\cap x=O$。于是由例4得$\overline{\overline{x}}=x$。（证毕）

例6．对任意的$x\in B$，有〔15〕$x\cup x=x$，〔16〕$x\cap x=x$。（此即幂等律）

证：〔15〕$x\cup x=(x\cup x)\cap I$ （基元律）

$=(x\cup x)\cap(x\cup\overline{x})$ （互补律）

$=x\cup(x\cap\overline{x})$ （分配律）

$=x\cup O$ （互补律）

$=x$ （基元律）（证毕）

例7．对任意的$x\in B$，有〔11〕$x\cup I=I$，〔12〕$x\cap O=O$。（此即泛界律）

证：〔11〕$x\cup I=(x\cup I)\cap I$ （基元律）

$=(x\cup I)\cap(x\cup\overline{x})$ （互补律）

$=x\cup(I\cap\overline{x})$ （分配律）

$=x\cup\overline{x}$ （交换律、基元律）

$=I$ （互补律）（证毕）

例8．对任意的$x,y,z\in B$，若$x\cap y=x\cap z$，$\overline{x}\cap y=\overline{x}\cap z$，则$y=z$。（称作吸等律）

证：因为

$(x\cap y)\cup(\overline{x}\cap y)=y\cap(x\cup\overline{x})=y\cap I=y$，

$$(x\cap z)\cup(\overline{x}\cap z)=z\cap(x\cup\overline{x})=z\cap I=z,$$

所以 $$y=z。$$ （证毕）

例9. 对任意的x，y，z∈B，有

〔9〕 $(x\cup y)\cup z=x\cup(y\cup z)$，

〔10〕 $(x\cap y)\cap z=x\cap(y\cap x)$。（此即结合律）

证： 〔9〕令$L=(x\cup y)\cup z$，$M=x\cup(y\cup z)$，

则 $$x\cap L=x\cap((x\cup y)\cup z)=(x\cap(x\cup y))\cup(x\cap z)$$

$$=x\cup(x\cap z)=x,$$

$$x\cap M=x\cap(x\cup(y\cup z))=x,$$

所以 $x\cap L=x\cap M$。

又因 $$\overline{x}\cap L=\overline{x}\cap((x\cup y)\cup z)=(\overline{x}\cap(x\cup y))\cup(\overline{x}\cap z)$$

$$=((\overline{x}\cap x)\cup(\overline{x}\cap y))\cup(\overline{x}\cap z)$$

$$=(\overline{x}\cap y)\cup(\overline{x}\cap z),$$

$$\overline{x}\cap M=\overline{x}\cap(x\cup(y\cup z))=(\overline{x}\cap x)\cup(\overline{x}\cap(y\cup z))$$

$$=O\cup(\overline{x}\cap(y\cup z))=(\overline{x}\cap y)\cup(\overline{x}\cap z),$$

所以 $\overline{x}\cap L=\overline{x}\cap M$。

于是由例8的吸等律，我们有$L=M$，这就证明了并的结合律。

（证毕）

例10. 对任意的x，y∈B,有

〔13〕 $\overline{x\cup y}=\overline{x}\cap\overline{y}$，

〔14〕 $\overline{x\cap y}=\overline{x}\cup\overline{y}$。（此即D·M律）

证： 〔13〕由分配律可知：

$$(x\cup y)\cup(\overline{x}\cap\overline{y})=(x\cup y\cup\overline{x})\cap(x\cup y\cup\overline{y})$$

$$=I\cap I=I$$

$$(x\cup y)\cap(\overline{x}\cap\overline{y})=(x\cap\overline{x}\cap\overline{y})\cup(y\cap\overline{x}\cap\overline{y})$$

$$=O\cup O=O$$

由互补律可得$\overline{x\cup y}=\overline{x}\cap\overline{y}$。 （证毕）

以上是从基本性质和基本规则出发，通过恒等变形证明逻辑

性质或定理。其实通过恒等变形还可以化简逻辑式，这在自动化电路的逻辑设计中具有很大的意义，它在逻辑代数中被称为“最小化问题”。我们在下一部分将作介绍，这里只把化简理解为使所含的原子个数最少。

例11. 化简$\overline{((x\cap y)\cup\overline{z})}\cup(\overline{x}\cap z)\cup y$。

解： 原式$=((\overline{x}\cup\overline{y})\cap z)\cup(\overline{x}\cap z)\cup y$ （反演规则）

$=(\overline{x}\cap z)\cup(\overline{y}\cap z)\cup(\overline{x}\cap z)\cup y$ （分配律）

$=(\overline{x}\cap z)\cup(\overline{y}\cap z)\cup y$ （幂等律）

$=(\overline{x}\cap z)\cup((\overline{y}\cap z)\cup y)$ （结合律）

$=(\overline{x}\cap z)\cup(\overline{y}\cup y)\cap(z\cup y)$ （分配律）

$=(\overline{x}\cap z)\cup I\cap(z\cup y)$ （互补律）

$=(\overline{x}\cap z)\cup z\cup y$ （泛界律）

$=((\overline{x}\cap z)\cup z)\cup y$ （结合律）

$=z\cup y$ （吸收律）

三　公式化简

公式化简主要使用前述十二个基本性质的公式（交换律、分配律、基元律、互补律、结合律、泛界律、对合律、德·摩根律、幂等律、条件律、双条件律、吸收律）以及下述六个公式。

（十三）$(x\cap y)\cup(x\cap\overline{y})=x$

（十四）$x\cup(\overline{x}\cap y)=x\cup y$ （消去律）

（十五）$(x\cap y)\cup(\overline{x}\cap z)\cup(y\cap z)=(x\cap y)\cup(\overline{x}\cap z)$

（十六）$(x\cap y)\cup(\overline{x}\cap z)\cup(y\cap z\cap x_1)=(x\cap y)\cup(\overline{x}\cap z)$

（十七）$\overline{(x\cap\overline{y})\cup(\overline{x}\cap y)}=(\overline{x}\cap\overline{y})\cup(x\cap y)$

（十八）$\overline{(x\cap y)\cup(\overline{x}\cap z)}=(x\cap\overline{y})\cup(\overline{x}\cap\overline{z})$

这些公式都是可以证明的。我们只举例证明公式（十八）：

证：$\overline{(x\cap y)\cup(\overline{x}\cap z)}=(\overline{x}\cup\overline{y})\cap(x\cup\overline{z})$ （反演规则）

$=(\overline{x}\cap x)\cup(\overline{x}\cap\overline{z})\cup(\overline{y}\cap x)\cup(\overline{y}\cap\overline{z})$（直接展开）

$= (x\cap\bar{y})\cup(\bar{x}\cap\bar{z})\cup(\bar{y}\cap\bar{z})$（$\because (\bar{x}\cap x)=0$）

$= (x\cap\bar{y})\cup(\bar{x}\cap\bar{z})$　　　（公式(十五)）（证毕）

下面介绍一些常用的公式化简方法。

（一）并项法　就是利用公式（十三）$(x\cap y)\cup(x\cap\bar{y})=x$ 将两项合并为一项，因而能消去一个变元的方法。在我们下面的讲述中，布尔积的写法准备简化，比如 $x\cap y$，就写成xy；$x\cup(y\cap z)$ 就写成$x\cup yz$，等等。

例1. $x\bar{y}z\cup x\bar{y}\bar{z}=x\bar{y}$。

例2. $xy\bar{z}\cup x\bar{y}\bar{z}=x$。

例3. $x(yz\cup\bar{y}\bar{z})\cup x(y\bar{z}\cup\bar{y}z)$

$= x(yz\cup\bar{y}\bar{z})\cup x\overline{yz\cup\bar{y}\bar{z}}$　　　（公式（十八））

$= x$。

（二）吸收法　就是利用公式（十三）（吸收律）消去多余的项的方法。

例4. $x\bar{y}\cup x\bar{y}zx_1(y_1\cup z_1)=x\bar{y}$。

例5. $\bar{y}\cup x\bar{y}z=\bar{y}$。

（三）消去法　就是利用公式（十四）（消去律）消去多余元素的方法。

例6. $\bar{x}\cup xy\cup zx_1=\bar{x}\cup y\cup zx_1$。

例7. $xy\cup\bar{x}z\cup\bar{y}z=xy\cup(\bar{x}\cup\bar{y})z$

$= xy\cup\overline{xy}z$

$= xy\cup z$

例8. $x\bar{y}\cup\bar{x}y\cup xyzx_1\cup\bar{x}\bar{y}zx_1$

$= (x\bar{y}\cup\bar{x}y)\cup(xy\cup\bar{x}\bar{y})zx_1$

$= (x\bar{y}\cup\bar{x}y)\cup\overline{x\bar{y}\cup\bar{x}y}zx_1$

$= x\bar{y}\cup\bar{x}y\cup zx_1$。

（四）配项法　就是加入某些元素进行化简的方法。

例9. 化简$H=x\bar{y}\cup xz\cup xx_1y_1\cup\bar{z}x_1$

解：因为在公式H中xz和$\overline{z}x_1$两项中都分别含有元素z和$\overline{z}$，而这两项的其余元素x和x_1又都包含在xx_1y_1当中，所以根据公式（十六）xx_1y_1可以消去，所以

$$H=x\overline{y}\cup xz\cup\overline{z}x_1$$

例10. 化简$H=x\overline{y}\cup y\overline{z}\cup\overline{y}z\cup\overline{x}y$

解：H没有可直接满足公式（十五）的条件，但是$\overline{y}z$配上元素$x\cup\overline{x}$后可析成$x\overline{y}z$、$\overline{x}\,\overline{y}z$，前者可被$x\overline{y}$吸收；再将$\overline{x}y$项配元素$z\cup\overline{z}$后可析成$\overline{x}yz$、$\overline{x}y\overline{z}$，后者可被$y\overline{z}$吸收；最后剩下的$\overline{x}\,\overline{y}z$和$\overline{x}yz$可合并成$\overline{x}z$，所以

$$\begin{aligned}H&=x\overline{y}\cup y\overline{z}\cup(x\cup\overline{x})yz\cup\overline{x}y(z\cup\overline{z})\\&=x\overline{y}\cup y\overline{z}\cup x\overline{y}z\cup\overline{x}\,\overline{y}z\cup\overline{x}yz\cup\overline{x}y\overline{z}\\&=(x\overline{y}\cup x\overline{y}z)\cup(y\overline{z}\cup\overline{x}y\overline{z})\cup(\overline{x}\,\overline{y}z\cup\overline{x}yz)\\&=x\overline{y}\cup y\overline{z}\cup\overline{x}z。\end{aligned}$$

当然，以上的并项法、吸收法、消去法和配项法都不是绝对单一的，它们可以综合运用。如下举例。

例11. 化简$H=xx_1\cup x\overline{x_1}\cup xy\cup\overline{x}z\cup yx_1\cup xzy_1z_1\cup\overline{y}y_1z_1\cup x_1y_1z_1x_2$

解：$H=(x\cup xy\cup xzy_1z_1)\cup\overline{x}z\cup yx_1\cup\overline{y}y_1z_1\cup x_1y_1z_1x_2$

（把第一、二项并项后集中含x的各项，以便被x所“吸收”）

$=(x\cup\overline{x}z)\cup(yx_1\cup\overline{y}y_1z_1\cup x_1y_1z_1x_2)$

$=(x\cup z)\cup(yx_1\cup\overline{y}y_1z_1)$（消去律，及公式（十六））

$=x\cup z\cup yx_1\cup yy_1z_1$。

例12. 化简$H=xy\cup xyx_1\cup\overline{x}z\cup yzx_1$。

解：$H=(xy\cup xyx_1)\cup\overline{x}z\cup yzx_1$

$=xy\cup\overline{x}z\cup yzx_1$　　（吸收律）

$=xy\cup\overline{x}z$　　（公式（十六））

例13. 化简$H = xy \cup x\overline{z} \cup \overline{y}z \cup \overline{z}y \cup \overline{y}x_1$

$$\cup \overline{x_1}y \cup xx_1y_1(z_1 \cup x_2)。$$

解： $H = x(y \cup \overline{z}) \cup \overline{y}z \cup \overline{z}y \cup \overline{y}x_1 \cup \overline{x_1}y \cup xx_1y_1(z_1 \cup$

$x_2) = (x\overline{\overline{y}z} \cup \overline{y}z) \cup \overline{z}y \cup \overline{y}x_1 \cup \overline{x_1}y$

$\cup xx_1y_1(z_1 \cup x_2)$　　　　（反演规则）

$= x \cup \overline{y}z \cup \overline{z}y \cup \overline{y}x_1 \cup \overline{x_1}y \cup xx_1y_1(z_1 \cup x_2)$

$= (x \cup xx_1y_1(z_1 \cup x_2)) \cup \overline{y}z \cup \overline{z}y \cup \overline{y}x_1 \cup \overline{x_1}y$

$= x \cup \overline{y}z \cup \overline{z}y \cup \overline{y}x_1 \cup \overline{x_1}y$　　　　（吸收律）

$= x \cup \overline{y}z(x_1 \cup \overline{x_1}) \cup \overline{z}y \cup \overline{y}x_1 \cup \overline{x_1}y(z \cup \overline{z})$

$= x \cup \overline{y}zx_1 \cup \overline{y}z\overline{x_1} \cup \overline{z}y \cup \overline{y}x_1 \cup \overline{x_1}yz \cup \overline{x_1}y\overline{z}$

$= x \cup (\overline{y}zx_1 \cup \overline{y}x_1) \cup (\overline{y}z\overline{x_1} \cup \overline{x_1}yz)$

$\cup (\overline{z}y \cup \overline{x_1}y\overline{z})$

$= x \cup \overline{y}x_1 \cup z\overline{x_1} \cup y\overline{z}$。　　　　（吸收律及并项法）

第二节　真值代数和命题代数

我们说过，当把布尔运算解释成真值运算时就成为真值代数，当把布尔运算解释成命题运算时就成为命题代数。由于真值代数和命题代数的联系更加密切，所以我们放在一起来讲。

一　真值代数的含义

令布尔代数中只含有I和O两个元素，并分别解释成命题的真和假。人们常用数字1或字母t表示真，用数字0或字母f表示假。把∪、∩、一分别解释成逻辑析取、合取和否定，记作∨、∧、¬。它们原来是命题联结词，指“或者”、“并且”和“并非”，在这里则可称为真值（即真假值）联结词，都算作运算符号。我们用字母Z来指称真值代数。由于其中只含有两个元素，因此它被说成是一个二元布尔代数。Z之所以构成一个布尔代数，是因为

我们有如下的真值表（在此将用a，b，c，…代替上节的x，y，z，…作为真值变项）：

a	b	$a \vee b$	$a \wedge b$	$\neg a$	$\neg a$
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

当我们把联结词看成真值运算符号的时候，上表也就是真值运算表。此表定义的$\vee$、$\wedge$、$\neg$三种运算，能够满足布尔代数B所要求的全部条件，就是说，B的公理经过解释在Z中都成立。因此，所推出的全部定理或演算规则也都在Z中成立。

真值代数中还有另外两个基本联结词，即$\longrightarrow$和$\longleftrightarrow$，分别指“如果，则”和“当且仅当”。它们都可以在Z中定义出来。设A和B是合式的真值运算表达式，则有：

$$A \longrightarrow B = df \neg A \vee B$$

$$A \longleftrightarrow B = df\ (A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A)$$

符号$=df$表定义。但是符号$\longleftrightarrow$跟$=$不同，虽然$\longleftrightarrow$通常称为等值词或等值符，而$=$也是表示真值的等同，但是前者在Z中是象普通数学中的$+$、$-$、$\times$、$\div$那样的运算符号，而$=$是关系符号。Z作为二元布尔代数，它有一些特殊的运算规则是多元布尔代数所不具备的，比如：如果$a \vee b = 1$，那么$a = 1$或$b = 1$；如果$a \wedge b = 0$，那么$a = 0$或$b = 0$。

二 命题代数的含义

我们用字母M表示命题代数。在一定范围内，M是所有命题

的集合，其中至少有两个特定的命题：永真命题和永假命题。前者记作1，后者记作0。这里用p，q，r，p_1，q_1、r_1，…作为命题变项。∨，∧，¬是三个命题联结词，它们在M中是命题运算符号。符号=现在是指命题的真假值的等同。经过这样解释，B中的公理在M中都成立，只要把前者的符号都相应地变换成后者就可以了。因此，M构成一个仍带有普遍意义的布尔代数。

命题代数和真值代数是紧密结合着的，但是它们之间又有区别。第一，研究对象不同。在命题运算当中所运算的对象是命题，而运算的结果也是命题，只是当谈到命题的相等与不等时才涉及命题真假值的比较。在真值运算当中所运算的对象是真假值，而运算的结果也是真假值，它们的相等与否直接就是真假值的比较。真值一般是命题的真假值，但是命题的真假值与真假命题还是有所不同的。第二，发挥作用不同。真值代数是用来计算命题的真假值的，而命题代数则主要是通过对命题真值的计算来确定命题形式之间的关系，特别是确定永真式或重言式。

所谓重言式就是这样的命题形式：无论其命题变项代入什么命题，有什么真假值，所得整个复合命题总是真的。因此，重言式构成命题逻辑的定律或规律。而重言蕴涵式和重言等值式都是复合命题推理的根据。例如，由于我们有重言蕴涵式

$$((p\longrightarrow q)\wedge(q\longrightarrow r))\longrightarrow(p\longrightarrow r),$$

所以我们有假言三段论推理

如果p，那么q
如果q，那么r
∴ 如果p，那么r

人们常用的重言式主要有：

同一律	$p\longrightarrow p$
矛盾律	$\neg(p\wedge\neg p)$
排中律	$p\vee\neg p$

附加律　$p \longrightarrow (p \vee q)$

削减律　$(p \wedge q) \longrightarrow p$

肯定肯定律　$(p \wedge (p \longrightarrow q)) \longrightarrow q$

否定否定律　$(\neg q \wedge (p \longrightarrow q)) \longrightarrow \neg p$

否定肯定律　$(\neg p \wedge (p \vee q)) \longrightarrow q$

假言三段论　$((p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)) \longrightarrow (p \longrightarrow r)$

归谬律　$(p \longrightarrow (q \wedge \neg q)) \longrightarrow \neg p$

反三段论　$(((p \wedge q) \longrightarrow r) \wedge (p \wedge \neg r)) \longrightarrow \neg q$

双重否定律　$p \longleftrightarrow \neg\neg p$

交换律　$p \wedge q \longleftrightarrow q \wedge p$

$p \vee q \longleftrightarrow q \vee p$

假言易位律　$(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg q \longrightarrow \neg p)$

德·摩根律　$\neg(p \wedge q) \longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

移入移出律　$(p \longrightarrow (q \longrightarrow r)) \longleftrightarrow ((p \wedge q) \longrightarrow r)$

蕴涵化归律　$(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow \neg p \vee q$

$(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

等值化归律　$(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow ((p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p))$

$(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$

命题代数的基本内容和前述命题逻辑相一致，在此不多重复。如下只重点讲述实质蕴涵和建立范式问题。

三　实质蕴涵

命题代数将"如果p，那么q"的假言命题表示为"$p \longrightarrow q$"，我们称符号$\longrightarrow$为实质蕴涵号，$p \longrightarrow q$读为"p实质蕴涵q"。我们知道，假言命题只是断定前、后件之间在真、假上的一种必然联系，即正确的假言命题当其前件真时后件也真，或者说不会有前件真而后件假的情况。假言命题既不断定前件的内容

事实上是真的或是假的，也不断定后件的内容事实上是真的或是假的；它只是讲“如果”前件是真的，“那么”后件必真而不可能假，前件真而后件假的假言命题是假命题。$p \longrightarrow q$的完全真值表如下：

p	q	$p \longrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

这说明实质蕴涵$p \longrightarrow q$只是从最抽象、最一般的意义上讲“如果p，那么q”命题的前后件的真假联系。事实上，前后件的具体联系是多种情况的。举例来说：（1）如果画动物都要画足并且蛇是动物，那么画蛇就得添足；（2）如果这个图形是梯形，那么它有四条边；(3)如果人长时缺氧，那么人就会死亡；（4）如果他创出成绩，那么我就向他学习。其中，（1）断定了它的前后件之间有一种逻辑联系，即其后件可从前件逻辑地推出。（2）断定了它的前后件之间有一种定义上的联系，即其后件可根据“梯形”的定义从前件导出。（3）断定了它的前后件之间有一种因果联系，因为其后件从前件得出既不能根据逻辑也不能根据定义，只能根据实际观察。（4）断定了它的前后件之间有一种决定性联系，即主体“我”在前件情况下将决定采取后件做法。

尽管有如上多种联系，但是它们之间有一个共同的性质，即无论何种联系（逻辑的、定义的、因果的、决定的等）都包含着前后件的真假联系。比如（2），当“这个图形是梯形”为真，而“它有四条边”为假的时候，命题（2）整个就是假的；但是，当“这个图形是梯形”为假时并不必然影响这个图形有四条边，

因此后件可能为真，命题（2）整个应该说是真的。其他例子也一样。所以实质蕴涵$p \longrightarrow q$高度概括了假言命题“如果p，那么q”的基本性质。当然这种高度概括跟自然语言的具体情况产生了一定距离。第一，自然语言中的“如果p，那么q”要求p和q之间必须有一种内容上或事理上的联系，因此很难接受类似“如果2＋2＝4，那么雪是白的”说法，但是实质蕴涵$p \longrightarrow q$从真假值上却肯定这类说法。第二，自然语言中也很难接受实质蕴涵中前件p为假而后件q为真则整个$p \longrightarrow q$为真的情况（前述真值表的第三行），比如“如果雪是黑的，那么冰是固体”，这对自然语言来说很古怪，但对实质蕴涵来说却完全肯定。尽管前后有这样的距离，我们也必须充分肯定实质蕴涵的理论意义和实践意义。实质蕴涵奠定了现代逻辑对命题和推理问题进行形式化研究的基础，特别是它对检验推理有效性方面很有作用。实质蕴涵在数学中的运用更为突出。

四 建立范式

如果一个命题公式满足这样两个条件：一是不包含符号$\longrightarrow$和$\longleftrightarrow$，二是其中否定符号$\neg$只属于变项，那么这个公式就是范式。例如，$(\neg p \vee q) \wedge r$就是范式，而$(p \longrightarrow q) \wedge r$或者$\neg(p \wedge \neg q) \wedge r$就不是范式。范式有两种：一是合取范式，一是析取范式。

合取范式是一个合取式，其合取的各个支命题都是简单的析取式。因此合取范式又称作析取的合取式。例如：

（1）$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

（2）$(\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee p)$

（3）$(p \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee q)$

就都是合取范式。一个合取范式是永真公式，当且仅当所有的合取项（即合取的支命题或简单的析取式）都是重言式。（如果一

个简单的析取同时包含着一个命题变项及其否定，如“$p \vee \neg p$”形式，那么它就是重言式。因此，一个合取范式是否是重言式，也可以用极简单的方法在有穷步骤内加以判定。比如上面的例子中，（1）的两个合取项即两个简单析取式都不是重言式，因此（1）不是重言式；（2）中虽然有两个合取项是重言式，但因为有一个不是重言式，所以（2）也不是重言式；只有（3）的所有合取项都是重言式，所以（3）是重言式。

合取范式的作用在于显示重言式。一个命题公式是不是重言式，可以借助于化归合取范式来判定。比如命题公式$p \longleftrightarrow q$，化归成合取范式就是上例的（1），由于（1）不是重言式，所以上述命题公式也不是重言式。再如命题公式（$p \longrightarrow q$）$\longrightarrow$（$\neg q \longrightarrow \neg p$），化归成合取范式就是上例的（3），由于（3）是重言式，所以上述命题公式也是重言式。

析取范式是一个析取式，其析取的各个支命题都是简单的合取式。因此析取范式又称作合取的析取式。例如：

（1）$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

（2）$(\neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p)$

（3）$(\neg p \wedge \neg q \wedge p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r \wedge p \wedge \neg r)$
$\vee (q \wedge \neg q \wedge p \wedge \neg r) \vee (q \wedge r \wedge p \wedge \neg r)$

就都是析取范式。一个析取范式是永假公式，当且仅当所有的析取项（即析取的支命题或简单的合取式）都是矛盾式。因为每一析取范式都是几个简单合取的析取，而判定一个简单合取是否为矛盾式的方法极为容易。如果一个简单合取同时包含着一个命题变项及其否定，如“$p \wedge \neg p$”形式，那么它就是矛盾式。因此，一个析取范式是否是矛盾式，也可以用极简单的方法在有穷步骤内加以判定。比如上面的例子中，（1）的两个析取项即两个简单合取式都不是矛盾式，因此（1）不是矛盾式；（2）中虽然有两个析取项是矛盾式，但因为有一个不是矛盾式，所以（2）也

不是矛盾式；只有（3）的所有析取项都是矛盾式，所以（3）是矛盾式。

析取范式的作用在于显示矛盾式即永假式。一个命题公式是不是矛盾式，可以借助于化归析取范式来判定。比如命题公式 $\neg(p\longleftrightarrow q)$，化归成析取范式就是上例的（1），由于（1）不是矛盾式，所以上述命题公式也不是矛盾式。再如命题公式 $(p\longrightarrow q)\wedge(q\longrightarrow r)\wedge\neg(p\longrightarrow r)$，化归成析取范式就是上例的（3），由于（3）是矛盾式，所以上述命题公式也是矛盾式或永假式。

合取范式和析取范式虽然可以显示命题公式的一些逻辑特征，可以判定重言式和矛盾式，但是一般的范式也有其局限性，那就是一公式的合取范式或析取范式不是唯一的，不同的范式可以表达同一的真值函项。因此需要构造一种优范式，这种范式能够表达唯一的真值函项。

优范式的作用很重要。优范式除了和一般范式一样可以作为命题公式的判定方法（即用优合取范式可以判定重言式，用优析取范式可以判定矛盾式）外，由于它是具有唯一性的范式，因此优范式还有着一般范式所没有的其他作用。比如我们可以运用化公式为优合取范式的过程来解决从某些前提寻求逻辑推断的问题。我们可以把前提公式用合取符号连接起来，再把这样得到的公式化为优合取范式。这样，优合取范式的每一合取项，以及合取项的任一合取都是前提合取的推断。

例如，设给定两个前提p和$p\longrightarrow q$。我们可以把这两个前提连接为合取式：

$p\wedge(p\longrightarrow q)$，求它的优合取范式为：

$(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q)$。

我们借助这个优合取范式，对于从这两个前提所能得出的全部推断就可以有一个概观。这些推断是：

（1）$p \vee q$；

（2）$p \vee \neg q$；

（3）$\neg p \vee q$；

（4）$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$；

（5）$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$；

（6）$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$；

（7）$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$。

然后，如果运用等值式$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \longleftrightarrow q$，可以将得到的公式简化，从上面（5）中得出推断q。

至于优析取范式的作用，它可以明确地列举出一个公式的真假情况。比如，要判明$p \longrightarrow (q \wedge r)$的真假情况，就可以通过求它的优析取范式得到。其优析取范式为：

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)。$$

从式中可以看出，原公式只有在这五种真值情况（即真假组合）下是真的。

第三节　类逻辑代数和集合代数

我们说过，当把布尔代数解释成词项运算就成为类逻辑代数，当把布尔代数解释成集合运算就成为集合代数。由于类逻辑代数和集合代数的联系更加紧密，所以我们放在一起来讲。

一　类逻辑代数的含义

类逻辑代数是对传统的直言逻辑的一种形式化。传统的直言逻辑的外延理论是建立在类之间的关系理论上的。如“所有S都是P”，是表示P这种性质为任意S所具有。对于事物的每一个性质，就有一个唯一的确定的类与之对应；反过来，对于每一个

类，也有一个唯一为这个类的元素所具有的性质与之对应。因此，对性质命题的研究就可以归结为对类与类之间关系的研究。现代逻辑证明，亚里士多德逻辑可以完全简化为类与类之间关系的理论，简化为类理论中的一小部分。所以三段论都可从类与类之间的一般关系中推导出来。比如，传统形式逻辑中最重要的定律如三段论中的AAA式：如果所有M是P并且所有S是M，那么，所有S是P。就相当于类逻辑演算中的三段论定律：如果$S\subset M$并且$M\subset P$，那么$S\subset P$。

我们用符号L表示类逻辑代数。传统形式逻辑所讲的概念所反映的类就是类逻辑代数中所讲的类，而概念外延间的五种关系在类理论中就称作类与类之间的基本关系。但是，在类逻辑代数中，对两个类之间的关系与可以由两个类形成一个新类的运算是加以区分的，并且阐述了类的各种运算及其规律。这样就进一步提供了推出新概念、推出复合概念的运算方法及其规律，为概念间的推演提供了新工具。

关于类逻辑代数L对于布尔代数B的解释。I解释成论域。O改用Φ，解释成关于并不存在的事物的词项（虚假概念）。补是相对于论域的负词项。并和交是两种不同的复杂词项。把词项A和B用可兼的“或”或者并存的“和”、“与”等字连起来构成一个具有并列结构的复杂词项，例如“工人或（和）农民”。如果用A、B构成一个具有偏正结构的词组（例如“液体燃料”），或者，如果用“且”、“又”、“而”等字将A、B连成一个具有并列结构的词组（例如“又年轻又好学”），那么，这些词组就表达A、B之交。传统形式逻辑中常说的属加种差的定义，不过是把一个词项表示成两个词项的交；划分则是要把一个词项表示成两两不相交的几个词项的并。类似这样，我们就可以将B解释成L。

二　集合代数的含义

如果我们把B中的元素不是象L那样只看作为词项，而是在更广泛的意义上看作为任意对象的总体即集合，那么B就可以被解释成集合代数。我们用J来表示这种代数。

所谓集合，就是任意对象（无论是在人的主观领域，还是在完全的客观领域中的对象）的总体。这个总体或集合中的所有对象都称作元素。元素可以是单个事物的个体，也可以是多个事物的集合，甚至是多种集合的集合等等。元素可以是一个，也可以是有限个或无限个。某科学理论或某议论范围内全部作为元素的对象所构成的集合，称为论域或全集，记为I。而不包含有任何元素的集合，称为空集，记为Φ。

如果个体a是集合A的元素，就说a属于A，记为$a\in A$。如果集合A是集合B的元素，就说A包含于B，记为$A\subset B$。

传统逻辑通常都在不考虑空类的情况下研究任意两个词项（概念）的外延，即研究事物类A和B之间有且只有下述五种关系：A全等于B，A真包含于B，A真包含B，A相交于B，A全异于B。在集合论中一般只正面涉及前两种关系，分别记为$A=B$和$A\subset B$，而且更多地用到A真包含于或等于B，即A包含于B，记为$A\subseteq B$，也有将此简写为$A\subset B$。由以上四种关系$\in$、$=$、$\subset$、$\subseteq$，可以分别定义出它们的否关系或补关系，比如a不属于A，记作$a\notin A$。$\in$、$=$、$\subset$、$\subseteq$四种关系在性质上有如下区别：

设x是个体或集合，A、B、C都是集合：

$\in$：非自反性　　$\neg(x\in x)$

　　非对称性　　$x\in B\longrightarrow\neg(B\in x)$

　　非传递性　　$(x\in B\wedge B\in C)\longrightarrow(x\in C\vee\neg(x\in C))$

$=$：自反性　　$A=A$

　　对称性　　$A=B\longrightarrow B=A$

传递性　　$(A=B\wedge B=C)\longrightarrow A=C$

$\subset$：非自反性　　$\neg(A\subset A)$

非对称性　　$A\subset B\longrightarrow\neg(B\subset A)$

传递性　　$(A\subset B\wedge B\subset C)\longrightarrow A\subset C$

$\subseteq$：自反性　　$A\subseteq A$

逆对称性　　$(A\subseteq B\wedge B\subseteq A)\longrightarrow A=B$

传递性　　$(A\subseteq B\wedge B\subseteq C)\longrightarrow A\subseteq C$

关于集合代数的运算，主要是一个一元运算即求补$\overline{\ }$，三个二元运算即求并$\cup$、求交$\cap$和求差$\setminus$（或记作一）。所得的结果称为补集、并集、交集和差集。一个含有全集I和空集Φ并且在$\cup$、$\cap$、$\overline{\ }$、$\setminus$运算之下封闭的集合J，就称为集合代数。

三　类的概念和演算

（一）类的概念

类逻辑代数主要研究类与类之间的关系，它主要包括类的和、类的积、类的补以及全类、空类等。

类的和也称类的并，它是指：设有C类，其元素或是A类的元素，或是B类的元素，那么C类就是A类和B类的和，记作$C=A\cup B$。类的积也称类的交，它是指：设有C类，其元素既是A类的元素，又是B类的元素，那么C类就是A类和B类的积，记作$C=A\cap B$。类的补是指：如果从全类中抽出任一类A的所有分子，那么剩下全类的其他分子就构成A类的补类，即非A，而A类和非A类没有共同元素，记作$A\cup\overline{A}=I$。所谓全类是指：由该类的一切元素或一切子类所构成的类，通常用符号I来表示。所谓空类是指：不包含任何一个元素或子类的类，通常用符号Φ来表示。

在明确上述概念之后，我们讲如下两个问题。

（二）类的演算

在类逻辑代数中常用以下符号：

（1）存在类：A、B、C、…；

（2）补类：$\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$、…；

（3）恒等：=；

（4）或者：∪。

在演算中也有直接用符号+来表示，即A∪B也可表示为A+B；

（5）并且：∩。

在演算中也有采取简写方式的，如A∩B写成A·B或AB。

运用这些符号，根据类与类之间的不同关系进行逻辑演算时，还要遵守如下定律：

（1）交换律：$A \cup B = B \cup A$；$AB = BA$。

（2）吸收律：$A \cup A = A$；$AA = A$。

（3）分配律：$A \cup BC = (A \cup B) \cdot (A \cup C)$；

$A(B \cup C) = AB \cup AC$。

（4）恒等律：$A = A$。

（5）排中律：$A = AB \cup A\overline{B}$。

（6）矛盾律：$A\overline{A} = \Phi$。

另外还有如下规则：

（1）类变项的代换规则　对于任何变项A、B、C，在任何公理或已证定理中，都可以代之以指称一个类的任何变项或变项结构（当然，象在命题演算中一样，代换也必须完整地进行，即对公式中不止一次出现的类变项都实行同样的代换）。比如在分配律中以$\overline{A}$代换B，以Φ代换C，就可得到：

$$A \cup \overline{A}\Phi = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \Phi)$$

（2）类等值的代换规则。这是说同一的类可以互相代换。比如在吸收律中有A∪A=A，如果把A∪A代入矛盾律，就可得到：

$$(A \cup A)\overline{A} = \Phi$$

（3）类等值的传递规则。这是说跟同一个类等值的几个类互相也等值。比如，如果$AB = BA$并且$BA = B(AB \cup A\overline{B})$，那么$AB = B(AB \cup A\overline{B})$。

（4）类等值的换位规则。这是说等号两边可以互换，比如$A\overline{A} = \Phi$可换位为$\Phi = A\overline{A}$。

根据上面的符号、定律和规则我们就可以进行一些最简单的类关系的演算和证明。下面只举两个例子。

例1．求证$A\Phi = \Phi$　　（任何类与空类之积等于空类）

证明：（1）$\Phi = \Phi$　　（恒等律）

（2）$A\overline{A} = \Phi$　　（矛盾律）

（3）$A\overline{A} = \Phi$　　（(2)代入(1)，$A\overline{A}/\Phi$）

（4）$AA = A$　　（吸收律）

（5）$AA\overline{A} = \Phi$　　（(4)代入(3)，AA/A）

（6）$A\Phi = \Phi$　　（(2)代入(5)，$\Phi/A\overline{A}$）

例2．求证$A \cup \Phi = A$（任何类与空类之和等于原来的类）

证明：（1）$A = AB \cup A\overline{B}$　　（排中律）

（2）$A = AA \cup A\overline{A}$　　（A/B）

（3）$A = AA \cup \Phi$　　（矛盾律）

（4）$A = A \cup \Phi$　　（吸收律）

（5）$A \cup \Phi = A$　　（等值换位）

（三）与传统形式逻辑的关系

类逻辑代数可以说是传统形式逻辑的直接继续。为了说明这一点，我们令类逻辑代数L中的变项为S，M，P，S_1，M_1，P_1，……，这样跟传统形式逻辑中的惯用符号就很接近了。我们还可以将$S \cap P$简写为SP，以及实行先$\cap$后$\cup$的规定。在类逻辑代数中有下面一些重要定理。

（1）$S = P$当且仅当$S \subseteq P$且$P \subseteq S$。

（2）$S \neq P$当且仅当$S \nsubseteq P$且$P \nsubseteq S$。

（3）$S\subseteq P$当且仅当$M\cap S\subseteq M\cap P$。

（4）$S\subseteq P$当且仅当$M\cup S\subseteq M\cup P$。

（5）$S\subseteq P_1\cap P_2$当且仅当$S\subseteq P_1$且$S\subseteq P_2$。

（6）$S_1\cup S_2\subseteq P$当且仅当$S_1\subseteq P$且$S_2\subseteq P$。

（7）$SP=\varnothing$当且仅当并非$SP\neq\varnothing$。

（8）如果$SP=\varnothing$，那么$S\overline{P}=\varnothing$或$S\overline{P}\neq\varnothing$。

（9）如果$S\neq\varnothing$且$S\overline{P}=\varnothing$，那么$SP\neq\varnothing$。

（10）如果$S\neq\varnothing$且$S\overline{P}\neq\varnothing$，那么$SP=\varnothing$或$SP\neq\varnothing$。

（11）如果$S\overline{M}=\varnothing$且$M\overline{P}=\varnothing$，那么$S\overline{P}=\varnothing$。

（如果$S\subseteq M$且$M\subseteq P$，那么$S\subseteq P$。）

（12）如果$SM\neq\varnothing$且$M\overline{P}=\varnothing$，那么$SP\neq\varnothing$。

（13）如果$S\neq\varnothing$且$SM=\varnothing$且$M\overline{P}=\varnothing$，那么$SP\neq\varnothing$。

（14）如果$M\neq\varnothing$且$M\overline{S}=\varnothing$且$M\overline{P}=\varnothing$，那么$SP\neq\varnothing$。

（15）$(S_1\cup S_2)P=\varnothing$当且仅当$S_1P=\varnothing$且$S_2P=\varnothing$。

（16）如果$(S_1S_2)P\neq\varnothing$，那么$S_1P\neq\varnothing$且$S_2P\neq\varnothing$。

传统形式逻辑中的A、E、I、O在类逻辑代数中表示如下：

SAP：$S\subseteq P$　　　$S\cap\overline{P}=\varnothing$

SEP：S和P不相交　　$S\cap P=\varnothing$

SIP：S和P相交　　$S\cap P\neq\varnothing$

SOP：$S\nsubseteq P$　　　$S\cap\overline{P}\neq\varnothing$

这种表示已经蕴涵着对它们的主项的存在性作了下述明确的规定：第一，不假定A，E的主项存在与否，就是说，无论主项的外延空与不空，A和E都可以是真的；第二，假定I，O的主项必须是存在的，就是说I和O只有在主项$\neq\varnothing$时才能是真的。因此，只要适当地外加某词项存在（即$\neq\varnothing$）的假定，在L中传统形式逻辑的几乎全部内容都仍然成立。

具体地说，只要外加$S\neq\varnothing$的假设，SAP就能换位得PIS，SAP与SEP就能有反对关系，SAP与SIP，SEP与SOP就都能有

差等关系；上述（9）和（10）就概括了这些事实。而（11）至（14）则概括地为直言三段论全部24个正确的格式提供了理论根据；（11）是关于从两个全称前提得全称结论的，（12）是关于从一个全称前提和一个特称前提得特称结论的，（13）和（14）则都是关于从两个全称前提得出特称结论的。至于其他定理，例如（3）就是附性法的根据，而（15）和（16）则概括地提供了两个原则，可借以分别发现包含复杂词项的直言命题与由包含较简单的词项的直言命题构成的复合命题，它们之间可能有的等值关系或蕴涵关系。例如，根据（15）可知，“所有指战员都英勇而顽强”等值于“所有指挥员都英勇，所有指挥员都顽强，所有战斗员都英勇，所有战斗员都顽强”。又如，对于“有的国产电冰箱物美价廉”这样的命题，就无法找到类似的与它等值的复合命题，而只能据（16）知道，它蕴涵“有的国产品物美，有的电冰箱物美，有的国产品价廉，有的电冰箱价廉”。总之，类逻辑代数和传统形式逻辑具有许多一致的地方。

四　集合的概念和演算

“集合”是现代数学和逻辑的一个原始概念。一般认为，至今还没有可能用更简单的概念来定义它。如果某个概念D是用较简单的概念C来规定的，那么这概念C本身也需要用更简单的概念B来规定。如此继续类推下去，最后势必要遇到一个最基本、最简单的概念A，不能用更为简单的概念来定义它。到了这一步我们所能做的，只是用例子来说明这一概念A的含义。我们把集合理解为一些任意的对象所组成的总体。因此我们可以说：在这一页书中的汉字全体所成的集合；在这一页书中的标点符号全体所成的集合；一条确定的线段上点的全体所成的集合等等。

（一）集合关系　集合之间的主要关系有：

1． 同一关系

定义：A＝B，当且仅当对于任意个体x，如果$x\in A$，则$x\in B$，并且如果$x\in B$，则$x\in A$。用符号定义则为：

$$A=B\longleftrightarrow(x)(x\in A\longleftrightarrow x\in B)$$

2. 包含关系

定义：$A\subseteq B$，当且仅当对于任意个体x，如果$x\in A$，则$x\in B$。用符号定义则为：

$$A\subseteq B\longleftrightarrow(x)(x\in A\longrightarrow x\in B)$$

3. 交叉关系（符号定义过繁，从略）

定义：两个集合A与B，如果有A中的元素是B中的元素，也有A中的元素不是B中的元素，并且有B中的元素是A中的 元素，也有B中的元素不是A中的元素，则称A与B有交叉关系。

4. 全异关系

定义：两个非空集合A与B，如果A中的每一元素都不是B中的元素，并且B中的每一元素都不是A中的元素，则称A与B有全异关系。

（二）集合运算　跟普通数学中两数之间可以进行加、减、乘、除等运算一样，在集合代数中两集合之间也有类似的运算，即并、交、差、补。

1. 集合的并（也称逻辑和）

定义：设A、B是两个集合，则由属于集合A和属于集合B的所有元素构成的集合叫作A与B的并集，简称并，记作$A\cup B$（或$A+B$），读作“A并B”，用符号定义则为：

$$(x)(x\in A\cup B\longleftrightarrow x\in A\vee x\in B)$$

例如：设$B=\{a, b, c, d\}$，$B=\{c, d, e\}$，

　　则$A\cup B=\{a, b, c, d, e\}$。

2. 集合的交（也称逻辑积）

定义：设A、B是两个集合，则由既属于集合A又属于集合B的所有元素构成的集合叫作A与B的交集，简 称 交，记 作$A\cap B$

（或A·B），读作“A交B”，用符号定义则为：

$(x)(x \in A \cap B \longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B)$

例如：设A＝{1，2，3}，B＝{3，4，5}，

则$A \cap B = \{3\}$。

3．集合的差（也称逻辑差）

定义：设A、B是两个集合，则由属于集合A但不属于集合B的所有元素构成的集合叫作A与B的差集，简称差，记作$A \setminus B$（或$A \sim B$，或$A - B$），读作“A差B”，用符号定义则为：

$(x)(x \in A \setminus B \longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin B)$

例如：设A＝{1，2，3}，B＝{2，3}，

则$A \setminus B = \{1\}$。

4．集合的补

定义：全集I与其任一子集A的差集$I \setminus A$，称作集合A关于I的补集，简称补，记作$\overline{A}$（或～A），读作“A的补”，用符号定义则为：

$(x)(x \in \overline{A} \longleftrightarrow x \in I \wedge x \notin A)$

很明显，某一集合的补，就是从全集中去掉这一集合元素所构成的集合。

例如：设I＝{a，b，c，d}，A＝{a，b}，

则$\overline{A} = I \setminus A = \{c, d\}$。

求补具有这样一条重要性质：一个集合的补集的补集就是原集合本身。这也称为双重否定律。还有，求补运算可以用求差运算表示，即$\overline{B} = I \setminus B$；反之，有了交运算以后，求差运算也可以用交、补两种运算表示，即$A \setminus B = A \cap \overline{B}$。由于求补运算是一元的，求差运算是二元的，所以求补运算要比求差运算简单。

（三）集合证明　集合运算中的一些定律，通过使用集合运算基本概念的定义和逻辑联结词的性质，可以进行证明。集合运算的基本定律有：

1. 交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$。

2. 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

   $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

3. 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

   $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

4. 幂等律：$A\cup A=A$；$A\cap A=A$。

5. 互补律：$A\cup\overline{A}=I$；$A\cap\overline{A}=\varnothing$。

6. 恒等律：$A\cup\varnothing=A$；$A\cup I=I$；

   $A\cap\varnothing=\varnothing$；$A\cap I=A$。

7. 德·摩根律（简称D·M律）：

   $(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cap\overline{B}$；

   $(\overline{A\cap B})=\overline{A}\cup\overline{B}$。

8. 吸收律：$A\cup(A\cap B)=A$；

   $A\cap(A\cup B)=A$。

9. 双否律：$\overline{\overline{A}}=A$。

下面我们作一些基本定律和其他定律的证明。

例1. 交换律

证明：在集合运算中，对任一元素x，有：

(1) $x\in(A\cup B)\longleftrightarrow(x\in A)\vee(x\in B)$（并定义）

(2) $(x\in A)\vee(x\in B)\longleftrightarrow(x\in B)\vee(x\in A)$（析取交换）

(3) $x\in(B\cup A)\longleftrightarrow(x\in B)\vee(x\in A)$（并定义）

(4) $x\in(A\cup B)\longleftrightarrow x\in(B\cup A)$（等值传递 和对称）

(5) $A\cup B=B\cup A$（同一关系定义）（证毕）

例2. 结合律

证明：先证第一式。由并集的定义，

任取$x\in(A\cup B)\cup C$，则$x\in A\cup B$或$x\in C$。

若$x\in C$，则$x\in B\cup C$，因此$x\in A\cup(B\cup C)$。

若$x\in A\cup B$，则$x\in A$或$x\in B$。

若$x\in A$，就有$x\in A\cup(B\cup C)$。

若$x\in B$，就有$x\in B\cup C$，因此$x\in A\cup(B\cup C)$。

于是，总有$x\in A\cup(B\cup C)$，

所以，$(A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)$。

反之，同样可证$A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C$。

所以$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$。

再证第二式。由交集的定义，不论$(A\cap B)\cap C$，还是$A\cap(B\cap C)$，都是由A，B，C的公共元素构成的集合，所以$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。　　　　（证毕）

例3． 分配律

证明：先证第一式。根据集合相等的定义，只需证明关系式$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$与$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$同时成立即可。具体证明如下：

设$x\in A\cup(B\cap C)$，则$x\in A\vee x\in(B\cap C)$。

若$x\in A$，则$x\in(A\cup B)$且$x\in(A\cup C)$，因此，

$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

若$x\in(B\cap C)$，则$x\in B\wedge x\in C$，因此，

$x\in(A\cup B)\wedge x\in(A\cup C)$即$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

由此可得①，$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

相反，设$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

则　$x\in(A\cup B)\wedge x\in(A\cup C)$。

若$x\in A$，则$x\in A\cup(B\cap C)$。

若$x\in\overline{A}$，则必有$x\in B\wedge x\in C$，因此，$x\in B\cap C$，

因此，$x\in A\cup(B\cap C)$。

由此得②，$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$。

由①，②可得：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

（证毕）

例4. 求证 $(A\setminus B)\cup B=A\cup B$。

证明：设 $x\in(A\setminus B)\cup B$，则

　　$x\in(A\setminus B)\vee x\in B$。

若 $x\in(A\setminus B)$，则 $x\in A$，故 $x\in A\cup B$。

若 $x\in B$，则 $x\in A\cup B$。

因此若 $x\in(A\setminus B)\cup B$，则 $x\in A\cup B$，

故有①，$(A\setminus B)\cup B\subseteq A\cup B$。

反之，若 $x\in A\cup B$，则 $x\in A\vee x\in B$。

若 $x\in B$，则 $x\in(A\setminus B)\cup B$。

若 $x\in A\wedge x\in\overline{B}$，则 $x\in(A\setminus B)\cup B$。

因此，若 $x\in A\cup B$，则 $x\in(A\setminus B)\cup B$。

故有②，$A\cup B\subseteq(A\setminus B)\cup B$。

由①、②可得：$(A\setminus B)\cup B=A\cup B$。（证毕）

例5. 求证 $A\subseteq B\wedge A\subseteq C\longrightarrow A\subseteq B\cap C$。

证明：由 $A\subseteq B$ 得 $A\cap B=A$。

　　由 $A\subseteq C$ 得 $A\cap C=A$。

因此，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap C=A$。

因此，$A\subseteq B\cap C$。　　（证毕）

例6. 求证，若 $A\subseteq B$，则 $A\cap C\subseteq B\cap C$；$A\cup C\subseteq B\cup C$。

证明：因为若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$。

所以

$$\begin{aligned}(A\cap C)\cap(B\cap C)&=(A\cap B)\cap(C\cap C)\\&=(A\cap B)\cap C\\&=A\cap C。\end{aligned}$$

所以 $A\cap C\subseteq B\cap C$。

又因 $(A\cup C)\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup C=A\cup C$。

所以 $A\cup C\subseteq B\cup C$。　　（证毕）

（四）运算的公理化　我们知道，集合运算和命题演算都同属于逻辑演算，因此它们在逻辑结构上有许多相近之处。认识这

种相近的特点，对我们进一步把握集合运算是有好处的。如下做一比较。

命题演算定理	集合运算定律
交换律①$p\vee q\longleftrightarrow q\vee p$	$A\cup B=B\cup A$
②$p\wedge q\longleftrightarrow q\wedge p$	$A\cap B=B\cap A$
结合律①$(p\vee q)\vee r$	$(A\cup B)\cup C$
$\longleftrightarrow p\vee(q\vee r)$	$=A\cup(B\cup C)$
②$(p\wedge q)\wedge r$	$(A\cap B)\cap C$
$\longleftrightarrow p\wedge(q\wedge r)$	$=A\cap(B\cap C)$
分配律①$p\vee(q\wedge r)$	$A\cup(B\cap C)$
$\longleftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$	$=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
②$p\wedge(q\vee r)$	$A\cap(B\cup C)$
$\longleftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$	$=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
幂等律①$p\vee p\longleftrightarrow p$	$A\cup A=A$
②$p\wedge p\longleftrightarrow p$	$A\cap A=A$
互补律①$p\vee\neg p\longleftrightarrow T$	$A\cup\overline{A}=I$
②$p\wedge\neg p\longleftrightarrow F$	$A\cap\overline{A}=\varnothing$
恒等律①$p\vee F\longleftrightarrow p$	$A\cup\varnothing=A$
②$p\vee T\longleftrightarrow T$	$A\cup I=I$
③$p\wedge F\longleftrightarrow F$	$A\cap\varnothing=\varnothing$
④$p\wedge T\longleftrightarrow p$	$A\cap I=A$
D·M律①$\neg(p\vee q)$	$(\overline{A\cup B})$
$\longleftrightarrow\neg p\wedge\neg q$	$=\overline{A}\cap\overline{B}$
②$\neg(p\wedge q)$	$(\overline{A\cap B})$
$\longleftrightarrow\neg p\vee\neg q$	$=\overline{A}\cup\overline{B}$
单否律①$\neg F\longleftrightarrow T$	$\overline{\varnothing}=I$
②$\neg T\longleftrightarrow F$	$\overline{I}=\varnothing$
双否律$\neg\neg p\longleftrightarrow p$	$\overline{\overline{A}}=A$

同一律$p\longleftrightarrow p$　　　　　　$A=A$

集合运算也能象命题演算和谓词演算一样实现公理化。这种公理系统的研究对象是集合，它的公理和定理陈述的是集合的性质关系和运算规律。我们知道，把集合论公理化，建立公理集合论，是在集合论中发现悖论，为了克服悖论而提出的改造集合论的一种主张。集合运算的公理系统很多，下面只简要介绍两种。

第一种是普通系统

1．初始符号

（1）集合变元：A，B，C，A_1……。

（2）集合常元：I（全集），∅（空集）。

（3）联结词：∨，∧，⟶，⟷。

（4）运算及关系符号：一元运算符$\overline{\ }$；二元运算符∪，∩；关系符∈，≐，≑。

2．形成规则（项的形成，公式的形成，从略）。

3．推理规则

（1）代入规则　如果某等式成立，那么同一变项都代以任意集合的表达式后，所得新等式也成立。

（2）替换规则　如果等式X≐Y（X，Y都是项）以及另一个含有X（或Y）的等式都成立，那么把后一等式中的若干个X（或Y）换成Y（或X）后，所得到的新的等式也成立。

（3）左等换规则　由A＝B和A＝C，可得B＝C。

4．定义

（1）$A/B\longleftrightarrow A\cap\overline{B}$

（2）$A\subseteq B\longleftrightarrow(A\cup B)=B$

（3）$A\subset B\longleftrightarrow(A\subseteq B)\wedge(A\neq B)$

5．公理

（1）$A\cup B=B\cup A$（交换律）

（2）$A\cap B=B\cap A$（交换律）

（3）$A\cup\varnothing=A$　（恒等律）

（4）$A\cap I=A$　（恒等律）

（5）$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$（分配律）

（6）$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$（分配律）

（7）$A\cup\overline{A}=I$（互补律，相当于排中律）

（8）$A\cap\overline{A}=\Phi$（互补律，相当于矛盾律）

6．定理

（1）$A\cup A=A$（并的幂等律）

（2）$A\cap A=A$（交的幂等律）

（3）$A\cup I=I$（恒等律）

……

接下去的一个定理系列，在这里就不详细写出了。这些定理依据推理规则、定义、公理和已证定理，其本身都是可以证明的。

第二种是复杂系统。这是一种更加严格的公理集合论。我们只介绍其中最通用的ZF系统。ZF系统包括下述公理：

1．外延公理　如果集合x和y的元素是相同的，则x和y相等。用符号表示：$(z)(z\in x\longleftrightarrow z\in y)\longleftrightarrow x=y$。

2．无序对公理　对于任意的x，y，存在一个集合z，z的元素是x和y。用符号表示：$(\exists_z)(w)(w\in z\longleftrightarrow w=x\vee w=y)$。这个由x和y组成的集合根据公理1，它是唯一的，记作：$\{x, y\}$。

3．分离公理（子集公理）。对于任何集合x和含一个自由变元的公式H，存在一个集合y，y的元素是那些满足H的x的元素。用符号表示：$(\exists_y)(z)(z\in y\longleftrightarrow z\in x\wedge H(z))$。

4．并公理　对于任何集合x，存在一个集合y，y的元素是x的元素的元素。用符号表示：$(\exists_y)(z)(z\in y\longleftrightarrow(\exists_t)(t\in x\wedge z\in t))$。对于任何集合x，由公理4所保证存在的这个集合，称为x的并集（或x的元的并，又称和集），根据公理1，x的并是唯一的，用$\cup_x$表示。

5．幂集公理　对于任何集合x，存在一个集合y，y的元素是x的所有子集。用符号表示：$(\exists_y)(z)(z\in y\longleftrightarrow z\subseteq x)$。其中，$z\subseteq x$表示z是x的子集。$z\subseteq x$定义为：$(t)(t\in z\longrightarrow t\in x)$。对于任何集合x，由公理5所保证存在的集合称为x的幂集，根据公理1，它是唯一的。用$P(x)$表示。

6．无穷公理　存在一个无穷集合z，具有性质（1）$\Phi\in z$，（2）如果$x\in z$，则$x\cup\{x\}\in z$。用符号表示：$(\exists_z)(\Phi\in z\wedge(x)(x\in z\longrightarrow x\cup\{x\}\in z))$。

7．替换公理　如果H是一个含两个自由变元的公式，并且对任意的变元x都只有一个y满足$H(x,y)$，则对任何集合u都存在一个集合V，使得对任何y，$y\in V$当且仅当有一x，使$x\in u$并且$H(x,y)$。用符号表示：$(x)(y)(z)(H(x,y)\wedge H(x,z)\longrightarrow y=z)\longrightarrow(u)(\exists_V)(y)(y\in V\longleftrightarrow(\exists_x)(x\in u\wedge H(x,y)))$。

8．正则性公理　每一非空集合x，都含有一个元素y，使得x和y没有共同元素。用符号表示：$(x)(x\neq\Phi\longrightarrow(\exists_y)(y\in x\wedge x\cap y=\Phi))$。

如果公理1—8再加上选择公理，所得的系统称为ZFC。选择公理是说：如果F是两两不相交的非空集合的族，则存在一个集合s，s和F的每一元有一个共同元素，s就称为F的选择集。用符号表示：$(F)(F\neq\Phi\wedge(x)(x\in F\longrightarrow x\neq\Phi)\wedge(x)(y)(x\in F\wedge y\in F\wedge x\neq y\longrightarrow x\cap y\neq\Phi)\longrightarrow(\exists s)(s\subseteq F\wedge(x)(x\in F\longrightarrow(\exists_y)(y\in x\cap s))\wedge(x)(y)(z)(x\in F\wedge y\in x\cap s\wedge z\in x\cap s\longrightarrow y=z)))$。

第四节　开关代数和概率代数

我们说过，当把布尔代数解释成电路运算就成为开关代数，

解释成事件运算就成为概率代数。因为开关代数更带有实际操作和具体应用特点，所以对它的主要内容放在第六章现代逻辑的实际应用里去讲，这里只作简单介绍。我们的重点放在概率代数。

一 开关代数的含义

如果将布尔代数中的并∪解释成电路并联，并改用符号+；将交∩解释成电路串联，并改用符号·；将补¯解释成电路反相；将常项O解释成电路断开，并改用符号0；将常项I解释成电路关通，并改用符号1；那么，就会构成开关代数系统。在这个系统中，有关并联、串联、反相的规律完全和并、交、补（即或、且、非）的规律一样。我们可直接从开关电路来验证六条基本规律。

（一）交换律　A+B=B+A；A·B=B·A。

这是不证自明的，因为开关A，B放在上方或下方、左边或右边毫无关系，问题在于，当且仅当A，B有一通，那么A+B及B+A都通；当且仅当A，B均通，那么A·B及B·A都通。

（二）结合律　（A+B）+C=A+（B+C）（见图4—1）

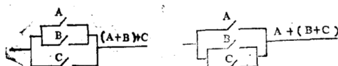


图　4—1

（A·B）·C=A·（B·C）（见图4—2）



图　4—2

每个图左右的电路都是等效电路。

（三）分配律　A·（B+C）=A·B+A·C（见图4—3）

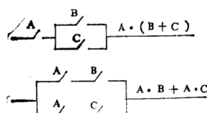


图 4—3

$$A+B\cdot C=(A+B)\cdot(A+C)$$（见图4—4）

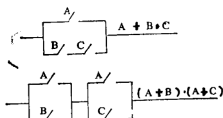


图 4—4

每个图上下的电路都是等效电路。

（四）吸收律　$A+A\cdot B=A$（见图4—5）

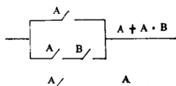


图 4—5

$A\cdot(A+B)=A$（见图4—6）

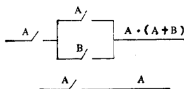


图 4—6

每个图上下的电路都是等效电路。

（五）基元律　$0+A=A$（见图4—7）

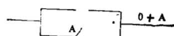




图　4—7

$0\cdot A=0$（见图4—8）





图　4—8

$1+A=1$（见图4—9）





图　4—9

$1\cdot A=A$（见图4—10）





图　4—10

每个图上下的电路都是等效电路。

（六）补元律　$A+\overline{A}=1$（见图4—11）



图 4—11

$A \cdot \overline{A} = 0$（见图4—12）

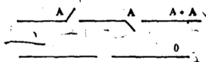


图 4—12

每个图上下的电路都是等效电路。

在开关代数中，除了通过等式来判别等效电路外，还可以通过公式化简来简化电路。以上定律中的吸收律在公式化简中经常用到，此外还有：

（七）剔除律 $A + \overline{A} \cdot B = A + B$；

$A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$。

（八）合并律 $A \cdot \overline{B} + A \cdot B = A$；

$(A + \overline{B}) \cdot (A + B) = A$。

（九）添补律 $A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$；

$(A + B) \cdot (\overline{A} + C) \cdot (B + C) = (A + B) \cdot (\overline{A} + C)$。

二 概率代数的含义

当把"事件"和"概率"引入布尔代数以后，就会形成概率代数。这里的事件是指的随机事件，即在一定条件下可能发生也可能不发生的事件。例如，从十个同类产品（其中有8个正品，2个次品）中，任意抽取三个，那么，

A＝“三个都是正品”

B＝“至少一个是次品”

就都是随机事件。而

C＝“三个都是次品”

D＝“至少一个是正品”

这两个事件，C是不可能发生的；D是必定要发生的。我们称不可能发生的事件为不可能事件，记作Φ；称必定要发生的事件为必然事件，记作I。为讨论问题方便起见，将不可能事件ϕ和必然事件I也当作随机事件。

关于事件的和与交。如果事件A与B中至少一件发生了，事件S就发生；反之，如果事件S发生了，A与B就至少发生一件，则称S为A与B的和，记为$S=A+B$。如果事件A与B同时发生则事件P发生；反之，如果P发生了，则A与B同时发生，那么，就说P是A与B之交，记为$P=A\cdot B$。

关于互斥事件与对立事件。若$A\cdot B=\Phi$，则称A与B为互斥事件。所谓互斥，就是说A与B不能同时出现。若$A\cdot B=\Phi$，$A+B=I$，则称A与B为对立事件。A的对立事件记为$\overline{A}$，仍读作非A。由定义可见：$A\cdot\overline{A}=\Phi$，$A+\overline{A}=I$。对立事件必然互斥，但互斥事件不一定对立。互斥事件不能同时发生，但可均不发生；对立事件不能同时发生，但必发生其一。

关于蕴涵。若A发生必然使B发生，则称A蕴涵B，记为$A\subseteq B$。事件关系中的蕴涵，就是集合关系中的包含于。在集合中的包含，是从外延的角度讲的，而事件中的蕴涵，是从内涵的角度讲的。

从上述情况不难看出，当我们把布尔代数中引入“事件”后就会出现新的解释。下面再引入“概率”定义：在不变的一组条件S下，重复作n次试验；记μ是n次试验中事件A发生的次数，当试验的次数n很大时，如果频率μ/n稳定地在某一数值p的附近摆

动，而且一般说来随着试验次数的增多，这种摆动的幅度愈变愈小，则称A为随机事件，并称数值p为随机事件A在条件组S下发生的概率，记作

$$P(A)=\frac{\mu}{n}=p。$$

这个定义也可以简单地说成：频率具有稳定性的事件叫作随机事件，频率的稳定值叫作该随机事件的概率。数值p就成为A在S下发生的可能性大小的数量刻划。比如，历史上有些人作过成千上万次投掷硬币的试验。下表列出他们的试验记录：

实验者	投掷次数n	出现“正面朝上”的次数μ	频率p＝μ/n
德摩根	2048	1061	0.518
巴 芬	4040	2048	0.5069
皮尔森	12000	6019	0.5016
皮尔森	24000	12012	0.5005

可以看出，投掷次数越多，频率p越接近0.5，就是说“正面朝上”的事件A的概率P（A）＝0.5。

由于频率μ/n总介于0和1之间，因而由概率的定义知，对任何随机事件A，有0≤P（A）≤1。而对必然事件I及不可能事件Φ，显然有P（I）＝1，P（Φ）＝0。

三　等可能概率

如果事件的全集只有有限个基本事件，而且基本事件中每一件都有同样的可能性出现，这时要计算某事件出现的概率，称为等可能概率，也称古典概型。

例如，盒中装有五个球（三个白球，二个黑球），从中任取一个，问取到白球的概率是多少？既然是“任取”，那么五个球

被取到的机会一样，而白球有三个，因此，取到白球的概率应该是3/5。

我们称一个事件组A_1，A_2，…，A_n为一个等可能完备事件组，如果它具有下列三条性质：

（1）A_1，A_2，…，A_n发生的机会相同（等可能性）；

（2）在任一次试验中，A_1，A_2，…，A_n至少有一个发生（也就是所谓"除此之外，不可能有别的结果"。）（完全性）；

（3）在任一次试验中，A_1，A_2，…A_n至多有一个发生(也就是所谓"它们是互相排斥的"。）（互不相容性）。

等可能完备事件组在这里也称为等概基本事件组；其中任一事件A_i（$i=1, 2, \cdots, n$）称为基本事件。若A_1，…，A_n是一个等概基本事件组，而事件B由其中的某m个基本事件所构成。大量实践经验表明，事件B的概率应由下面公式来计算：$P(B)=m/n$。

等可能概率的基本定律：

（1）$P(I)=1$（即必然事件的概率为1）；

（2）$P(\Phi)=0$（即不可能事件的概率为0）；

（3）$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

（4）若A、B互斥，则$P(A+B)=P(A)+P(B)$；

（5）若A、B不互斥，则$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；

（6）若为时立事件，则$P(\overline{A})=1-P(A)$；

如果已知A确已发生，要求B发生的概率，这种概率叫条件概率，并记为$P(B|A)$，于是有

（7）$P(B|A)=P(AB)/P(A)$；

（8）$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$；

如果$P(B|A)=P(B)$，则称B是独立于A的，由（8）可

得

(9) $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$；

如果B独立于A，可以证明A也独立于B，因此由(9)可得

(10) $P(A)=P(AB)/P(B)=P(A|B)$。

四　概率运算

关于概率加法公式：

(1) 如果事件A，B互斥，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

此公式表达了概率的最重要特性：可加性。它是从大量的实践经验中概括出来的，成为我们研究概率的基础与出发点。从概率的定义来看，这个公式的成立是很自然的。从(1)可得到：$P(A)+P(\overline{A})=P(A+\overline{A})=P(I)=1$，因此还得到

(2) $P(\overline{A})=1-P(A)$

(3) 设n个事件A_1，A_2，…，A_n互斥，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

此公式称为概率的有限可加性，它可从(1)推导出来。还有一个概率的完全可加性公式：

(4) 设A_1，A_2，…，A_k，…是一系列事件。记$\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$(或$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$)为这样的事件：它的发生意味着诸$A_k$($k=1,2,\cdots$)中至少有一个事件发生，称它为诸$A_k$($k=1,2,\cdots$)之和。如果$A_k$($k=1,2,\cdots$)两两互斥即互不相容，则有公式

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)$$

(5) 对任意两个事件A，B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

（6）不难看出$A+B=A+B\overline{A}$，由于A和$B\overline{A}$互不相容，于是按（1）式有

$$P(A+B)=P(A+B\overline{A})=P(A)+P(B\overline{A})$$

对概率加法，我们试举一例。某工厂的产品分为一级品，二级品，三级品三档。在正常生产的条件下，出现二级品的概率是7%，出现三级品的概率是3%，其余都是一级品。求出现非一级品的概率。

假如一只一只地抽验100只产品，根据概率的频率含义，大约将抽到7只二级品。显然，一只产品不可能同时既是二级品又是三级品。这样，在100只中大约还会抽到3只三级品。因此100只产品中大约就有10只是非一级品。根据这样的分析，抽到非一级品的概率应该是10%。

解　记"抽验一只产品是二级品"为事件A，记"抽验一只产品是三级品"为事件B，"抽验一只产品是非一级品"就是事件A+B。由于事件A和B是互斥即互不相容的，所以

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=7\%+3\%=10\%。$$

下面谈关于概率乘法公式：

（7）如果事件A、B互相不独立，则有

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$$

（8）如果事件A、B互相独立，则有

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

（9）可将上式（8）推广，如果事件A_1，A_2，…A_n互相独立，则有

$$P(A_1,A_2\cdots,A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots\cdots P(A_n)$$

怎样判断一些事件是否互相独立，在很多情况下是根据对事件本质的分析就可以知道，并不需要复杂的计算。我们举一实例：设某型号的高射炮，每一门炮（发射一发）击中敌机的概率

为0.6；现若干门炮同时发射（每炮射一发），问欲以99%的把握击中来犯的一架敌机，至少需配置几门高射炮？

解　设n是以99%的概率击中敌机需配置的高炮门数；并记

A_i = "第i门炮击中敌机"（$i=1,2,\cdots,n$）

A = "敌机被击中"

注意到

$$A=A_1+A_2+\cdots+A_n$$

于是要找n，使

$$P(A)=P(A_1+A_2+\cdots+A_n)\geqslant 0.99 \qquad (1)$$

由于$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\cdots\cdot\overline{A_n}$且$\overline{A_1}$，$\overline{A_2}$，…，$\overline{A_n}$是相互独立的，所以

$$\begin{aligned}P(A)&=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\cdots\cdot\overline{A_n})\\&=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot\cdots\cdot P(\overline{A_n})\\&=1-(0.4)^n\end{aligned}$$

因此，不等式（1）化为

$$1-(0.4)^n\geqslant 0.99$$

即　$(0.4)^n\leqslant 0.01$

$$n\geqslant\frac{\lg 0.01}{\lg 0.04}=\frac{2}{0.3979}=5.026$$

故至少需配置六门高射炮才能以99%以上的把握击中来犯的一架敌机。

关于全概公式与逆概公式：

（10）（全概公式）如果事件组A_1，A_2，…A_n满足：①A_1，A_2，…，A_n互不相容而且$P(A_i)>0$（$i=1,\cdots,n$）；②$A_1+A_2+\cdots+A_n=I$（完全性），则对任一事件B皆有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

其中，满足条件①和②的事件组A_1，A_2，…A_n叫作完备事件组。运用全概公式的关键往往在于找出一个完备事件组。我们举个实例：甲、乙、丙三人向同一飞机射击；设甲、乙、丙射中的概率分别为0.4，0.5，0.7；又设若只有一人射中，飞机坠毁的概率为0.2；若二人射中，飞机坠毁的概率为0.6；若三人射中，飞机必坠毁，求飞机坠毁的概率。

解 记B＝“飞机坠毁”

A_0＝“三人皆射不中”

A_1＝“只一人射中”

A_2＝“恰二人射中”

A_3＝“三人皆射中”

显然，A_0，A_1，A_2，A_3是完备事件组。而按加法与乘法公式有

$$P(A_0)=0.6\times0.5\times0.3=0.09$$

$$P(A_1)=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36$$

$$P(A_2)=0.6\times0.5\times0.7+0.4\times0.5\times0.7+0.4\times0.5\times0.3=0.41$$

$$P(A_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14$$

再由题设有

$$P(B\mid A_0)=0,\qquad P(B\mid A_1)=0.2$$

$$P(B\mid A_2)=0.6,\qquad P(B\mid A_3)=1$$

利用全概公式就得

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

$$=0.09\times0+0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1$$

$$=0.458$$

这个解说明，在甲、乙、丙的情况中或条件下，飞机坠毁的可能性或概率为0.458，即不到50%。

（11）（逆概公式）设A_1，A_2，…，A_n为一完备事件组，则对任一事件B（自然要求P（B）≠0）有

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}\quad(j=1,\cdots,n)$$

逆概公式亦称为贝叶斯（Bayes）公式，它在理论上与应用上都十分重要。我们在此举一实例：设患有肺结核的人，通过胸部透视被诊断为肺结核的概率为95%；而未患肺结核的人，通过透视被误诊为肺结核的概率为0.2%；设某地居民患肺结核的概率为0.1%，若从中随机抽出1人，通过透视被诊断为肺结核，求此人确实患有肺结核的概率。

解　设T＝“患肺结核”

A＝“透视诊断为肺结核”

依题意$P(T)=0.001$，$P(A|T)=0.95$，$P(A|\overline{T})=0.002$，易知$P(\overline{T})=0.999$，求$P(T|A)$。

根据逆概公式

$$P(T|A)=\frac{P(T)P(A|T)}{P(T)P(A|T)+P(\overline{T})P(A|\overline{T})}$$

$$=\frac{0.001\times0.95}{0.001\times0.95+0.999\times0.002}$$

$$=0.32225$$

$$\approx\frac{1}{3}$$

五　排列与组合

学习概率代数常常遇到排列与组合问题。其实学习传统形式逻辑和学习现代逻辑也都需要排列与组合的知识。在此只作简要介绍。

（一）排列

排列有两种：可重复排列和非重复排列。我们从一些简单的例子入手，逐步引出排列的一般概念。

例1．设某城市的电话号码是六位数，问此城市的电话局共能容纳多少个用户？（为使问题简单，我们假定每个用户只用1个电话号码。）

很明显，能容纳多少个用户就看有多少个六位数。所谓1个六位数就是这样的有顺序的一排数：$a_1a_2a_3a_4a_5a_6$，其中a_1是10个数码0,1,2，…，9中的1个，a_2，a_3，…a_6也都是这10个数码中的1个。这里次序很要紧，例如282471与282417就是不同的。这种有次序的一排东西就叫做1个排列。于是1个电话号码就是由0,1,2，…，9中一些数构成的1个排列。

六位数的电话号码一共有多少种呢？换句话说，排列$a_1a_2a_3a_4a_5a_6$一共有多少种呢？因为每个a_i都有10种可能，不难推知，一共有$10\times10\times10\times10\times10\times10=10^6$种可能，于是该城市的电话局共能容纳100万个用户。如果用户超过100万，则六位数就不够，就得更长的位数。

我们要注意的是，刚才谈的“排列”都是允许重复的，例如电话号码282471里“2”就重复出现了。这种允许重复的排列叫做可重复排列。现在问：从n个各相同的东西A_1，A_2，…，A_n中任取一个，然后放回去，再任取一个，然后又放回去，这样下去共进行m次，所得到不同的序列共有多少种？

显然m次有放回的抽取就得到由｛A_i｝组成的可重复的排

列。这种排列共有如下种：

$$\overbrace{n\times n\times\cdots\times n}^{m}=n^m$$

这就是计算可重复排列的公式。下面讲非重复排列。

例2. 三艘远洋货轮中派两艘外出，要考虑先后次序，问共有几种派法？

设以a，b，c代表三艘货轮，则共有六种派法：ab，ac，ba，bc，ca，cb。这个答案遵从一个确定的法则，首先考虑第一艘货轮，共有三种可能，即a或b或c，当派出一艘之后，剩下来只有两艘可供第二次派遣，例如派出a后，第二次只能再派b或c，因此总的派法为$3\times2=6$种。

这个问题的一般提法是：从n个各不相同的东西里，任取m个排成一列（$1\leqslant m\leqslant n$）（注意，不再放回即没有东西重复），问：这样的排列共有多少种？我们称这个问题为非重复的排列问题。排列总数记为P_n^m。我们来导出P_n^m的计算公式。注意m是不超过n的正整数。每个排列都是这样有次序的一排东西：$a_1a_2\cdots a_m$。

先看$m=1$的情况，此时每个排列就只一个东西。显然共有n个可能，故$P_n^1=n$。

再看$m=2$的情况，此时排列是有次序的两个东西构成。首先考虑第一个位置上的a_1有多少种可能，显然有n种可能，选定一种后，第二个位置上的a_2就只有$n-1$种可能（因为不能与第一个位置上的a_1相重）。于是a_1a_2共有$n(n-1)$种可能，故

$P_n^2=n(n-1)$。

再看$m=3$的情况，此时排列是有次序的三个东西$a_1a_2a_3$构成，a_1有n种可能，选定a_1后，a_2有$n-1$种可能（因为不能与第一个位置上的相重），a_1，a_2选定后，a_3有$n-2$种可能（因为不

能与第一个位置及第二个位置上的相重）。于是排列$a_1a_2a_3$共有$n(n-1)(n-2)$种，故$P_n^3=n(n-1)(n-2)$。

按同样的推理就可得计算非重复排列（简称排列）的一般公式：$P_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$。注意一共有m个因子。

特别m＝n时，得$P_n^n=n(n-1)\cdots2\cdot1$。最后一定是“$\cdots\times2\times1$”。这个乘积在数学里常出现，叫做n的阶乘，记作n！即$n!=n(n-1)\cdots2\cdot1$。以后为了方便规定$0!=1$。易知

$$P_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}\quad(1\leqslant m\leqslant n)$$

（二）组合

不讲次序的问题就是所谓“组合问题”。一般提法是：从n个各不相同的东西里，任取m个出来（不管顺序），问共有多少种取法？我们先举个例子。

例2. 某男子乒乓球队运动员4人，派其中3人参加团体赛，问：有多少种派法？

设这4个运动员为A，B，C，D。任派3人，不同派法是：①A，B，C；②B，C，D；③C，D，A；④D，A，B。一共是四种。我们这里不讲出场次序。如果讲究出场次序，那是排列问题，共有$P_4^3=24$种。

进行组合时每一种取法称为一个组合，不同的组合总数通常用符号C_n^m表示。需要注意的是排列和组合不同：从n个东西里取出m个后在排列中还要考虑这m个的次序，而在组合中则不考虑这m个的次序。现在来导出C_n^m（$1\leqslant m\leqslant n$）的计算公式。

设n个东西是a_1，a_2，…，a_n。

先看m＝1的情况。任取其中1个，显然有n种取法。因为1个东西无所谓次序，排列和组合的种数相同，也就是$C_n^1=P_n^1=n$。

再看m＝2的情况。从n个东西里任取2个，每种取法（组合）可以排成2种次序。例如取到a和b，则可以排成ab和ba。可见排

列数比组合数多一倍，故$P_n^2=2\cdot C_n^2$，于是

$$C_n^2=\frac{P_n^2}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

现在考虑$m=3$的情况，即求从n个东西里取出3个的组合数。设某一种取法中的3个东西是a,b,c。对应这种取法（组合）如果还要排列则有abc，acb，bca，bac，cba，cab，这里一共有P_3^3种可能。所有这些排列都是由一种组合变来的，所以排列数是组合数的P_3^3倍，即6倍。也就是$P_n^3=P_3^3\cdot C_n^3$，所以

$$C_n^3=\frac{P_n^3}{P_3^3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

根据完全相同的道理，从n个东西中任取m个出来（例如$a_1, a_2, \cdots, a_m$），对这m个东西进行各种排列共得P_m^m种不同的结果。所以排列的总数是组合总数的P_m^m倍，即$P_n^m=P_m^m\cdot C_n^m$，故

$$C_n^m=\frac{P_n^m}{P_m^m}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

显然

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\ (n-m)!}\quad(1\leqslant m\leqslant n)$$

在数学里常规定$C_n^0=1$，这样在上面的公式里，$m=0$也可以。

第五章 模态逻辑

我们在讨论分析的真命题时，常常把分析的真命题解释为在一切可能的情况下始终是真的命题，或者解释为必然为真的命题。同样地，我们在说明正确的推理时，总要指出正确的推理是所有前提都真而其结论必然也是真的，即不可能其前提都真而结论为假。在对命题和论证的解释中，我们使用了“必然”、“可能”、“不可能”等概念。这种概念我们称作模态概念，而研究和处理带有这种模态概念的命题和推理的科学，就称作模态逻辑。

“模态”一词是英语modal的音译，含有模型、情态等意思。看来“模态”一词的翻译很巧妙，既是音译，也有意译的因素。模态逻辑有着悠久的历史。早在古希腊，亚里士多德就对模态逻辑作过讨论。但用数理逻辑方法研究模态逻辑是始于本世纪初。美国学者刘易斯（Lewis）从研究严格蕴涵出发，在命题逻辑中加进模态词L（必然）和M（可能）而构造了模态逻辑系统S_1—S_5。六十年代，克利普克（Kripke）提出可能世界的语义解释，从而使模态逻辑的发展进入一个新的时期。其后出现了许多新的逻辑分支，形成了一个内容极为丰富多彩的逻辑领域。

第一节 标准模态逻辑的产生

标准模态逻辑是现代模态逻辑中的基础理论部分，它是用数

理逻辑作工具，在传统形式逻辑中的模态逻辑理论基础上所进行的形式化和公理化研究。传统形式逻辑早就开始研究模态命题和模态推理问题，但是它的研究主要建立在古典二值逻辑的基础上，而且主要体现于自然语言的阐述。比如关于模态命题的对当关系问题，传统形式逻辑是这样研究的：

对于“必然P”和“可能P”这两个模态命题，人们可以加入否定的概念。这样，就可以得到下面四种模态命题：必然P（必然肯定模态命题），必然非P（必然否定模态命题），可能P（可能肯定模态命题），可能非P（可能否定模态命题）。这四种模态命题之间的关系，同A、E、I、O四种性质命题之间的关系是相同的。图5—1就是四种模态命题的逻辑方阵：

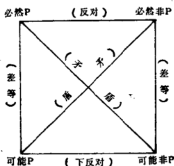


图 5—1

“必然P”与“可能非P”之间是矛盾关系。因此，肯定“必然P”就等于否定“可能非P”。而否定“可能非P”，就是在它的前面再加上“并非”或“不”。于是：“必然P”等值于“不可能非P”。例如：“历史是必然要前进的”等值于“历史是不可能不前进的”。

用类似的方法，还可以得到：“可能非P”等值于“不必然P”。例如：“生癌症是可能不死的”等值于“生癌症是不必然死的”。另外：“必然非P”等值于“不可能P”。例如：“谎言是必然不能长期骗人的”等值于“谎言是不可能长期骗人

的”。还有：“可能P”等值于“不必然非P”。例如：“人类登上火星是可能成功的”等值于“人类登上火星是不必然不成功的”。

至于差等关系、反对关系和下反对关系，它们也和矛盾关系的上述情况一样，都跟性质命题的逻辑方阵具有相似情况，不再赘述。重要的是，传统形式逻辑进一步研究了模态命题与性质命题之间的关系，就是“必然P”、“必然非P”、“可能P”、“可能非P”与“P”之间的关系。这种关系有下面四条规律：（1）如果“必然P”是真的，那么“P”就是真的。例如：“共产主义社会是必然要实现的”这个命题是真的，因此，“共产主义社会是要实现的”这个命题也是真的。（2）如果“P”是真的，那么“可能P”就是真的（举例类似，不再赘述）。（3）如果“必然非P”是真的，那么“非P”就是真的。（4）如果“非P”是真的，那么“可能非P”就是真的。

由上面4条规律可以看出，从必然命题能够推出性质命题，从性质命题能够推出可能命题。但是，从可能命题却不能推出性质命题，从性质命题也不能推出必然命题。必然命题断定最多，性质命题断定较少，可能命题断定最少。传统形式逻辑认为，“必然P”和“可能P”中的“P”可以代表任何命题，即可以代表A、E、I、O，也可以代表“如果P那么q”、“P并且q”、“P或者q”等。同时，也可以用两个模态命题构成一个复合模态命题，例如“必然P并且可能q”等。这样就可以构成许许多多的不同的模态命题。这些复杂的模态命题的真假可以根据模态概念（必然、可能）的意义和逻辑联结词（如果，那么；或者等）的意义来加以确定。在此基础上，传统形式逻辑又进一步展开对模态推理的研究，其中包括模态三段论等，而且主要是作一些直观性的说明，例如“必然P或者必然q”蕴涵“必然（P或者q）”，“可能（P或者q）”等值于“可能P或者可能q”，等等。

随着数理逻辑的出现，随着传统形式逻辑的现代化，模态逻辑

的研究也开始走上了形式化和公理化道路，而且由于它通过建立模态演算系统来研究正确的模态推理形式，因而成为数理逻辑的一个重要分支。现代标准模态逻辑的创始人是刘易斯，而卢卡西维茨、塔尔斯基、克利普克等人的研究成果也起了奠基作用，刘易斯先后创立了五个模态命题逻辑的公理系统，它们被称为S_1、S_2、S_3、S_4、S_5。在公理系统中，如果把“可能”作为初始的模态，表示为“◇”，那么“不可能P”就表示为“¬◇P”，“必然P”就表示为“¬◇¬P”，等等；如果把“必然”作为初始的模态，表示为“□”，那么“可能P”就表示为“¬□¬P”，“可能不P”就表示为“¬□P”，等等。

刘易斯还提出“严格蕴涵”（表示为“P—3q”）的概念。这种蕴涵不同于实质蕴涵，它是靠模态来定义的。他创立的模态命题逻辑系统把“严格蕴涵”作为基本运算，同时规定若干公理和推理规则。后来，美国的一些逻辑学家探讨了刘易斯的模态命题逻辑系统，在S_3的基础上建立了一个一阶谓词演算的模态系统。

从总的方面来看，模态逻辑同多值逻辑有着非常密切的联系，最简单的模态逻辑系统是三值逻辑系统，除了“真”、“假”值之外，第三值被解释为“可能”。但是大多数的模态逻辑系统，包括刘易斯的所有系统都是无穷值。近20年来，基于可能世界语义学而发展了模态模型理论，从而推动了模态逻辑的迅速发展。根据克利普克语义学而构造出来的典型模型，完满解决了标准模态逻辑系统相对于特定模型类的特性（可靠性与完全性）问题。

第二节 模态概念、命题及语义

一 模态概念

也有将“模态概念”称作“模态词”、“模态算子”或“模态

'联结词'的，它指的是这样一种形式的概念，当它联结在某一命题形式的一端时，就使这个命题形式得以表示事物或其属性的必然性、可能性及其他某些模态关系。在模态逻辑体系中，将模态概念符号化，给予定义，并对其真假值进行逻辑分析。模态概念有许多，我们在此只介绍八个：

（一）"必然" 用符号"$\Box$"表示。如果用"可能"（符号为"$\Diamond$"）给下定义的话，那么"必然"就定义为"并非可能不"（或"不可能不"），其形式为：$\Box A =_{Df} \neg\Diamond\neg A$。

（二）"可能" 用"符号""$\Diamond$"表示。如果用"必然"给下定义的话，那么"可能"就定义为"并非必然不（或"不必然不"），其形式为：$\Diamond A =_{Df} \neg\Box\neg A$。

（三）"并非必然"（或"不必然"） 用符号"$\neg\Box$"或"$\not\Box$"表示。如果用符号"$\neg\Box$"表示，则可定义为：$\neg\Box A =_{Df} \Diamond\neg A$。如果用符号"$\not\Box$"表示，则可定义为：$\not\Box A =_{Df} \neg\Box A$，或$\not\Box A =_{Df} \Diamond\neg A$。两个定义等值。

（四）"并非可能"（或"不可能"） 用符号"$\neg\Diamond$"或"$\not\Diamond$"表示。如果用符号"$\neg\Diamond$"表示，则可定义为：$\neg\Diamond A =_{Df} \Box\neg A$。如果用符号"$\not\Diamond$"表示，则可定义为：$\not\Diamond A =_{Df} \neg\Diamond A$，或$\not\Diamond A =_{Df} \Box\neg A$。两个定义等值。

（五）"严格蕴涵" 用符号"$\strictif$"，表示。如果用"必然"和"实质蕴涵"给下定义的话，那么"严格蕴涵"就定义为"必然'A蕴涵B'"（"或'A蕴涵B'是必然的"），其形式为：$A \strictif B =_{Df} \Box(A \rightarrow B)$。如果用"不可能"和"实质蕴涵"给下定义的话，那么"严格蕴涵"就定义为"不可能不是'A蕴涵B'"（或"'A蕴涵B'为假是不可能的"），其形式为：$A \strictif B =_{Df} \neg\Diamond\neg(A \rightarrow B)$。

（六）"严格等值"用符号"$\equiv$"表示。如果用"严格蕴涵"给下定义的话，则可定义为：$A \equiv B =_{Df} (A \strictif B) \wedge (B$

$\longrightarrow\!\!\!\!3$A)。

(七)“相容” 用符号“○”表示。如果用“可能”给下定义的话，那么“相容”就定义为“‘A并且B’是可能的”，其形式为：A○B $=_{Df}$◇（A∧B)。如果用“严格蕴涵”给下定义的话，其形式为：A○B $=_{Df}$¬（A$\longrightarrow\!\!\!\!3$¬B）。两个定义等值。

(八)“并非相容”(或“不相容”) 用符号“Φ”表示。如果用“必然”给下定义的话，那么“并非相容”就定义为“‘非A或非 B’是必然的”，其形式为：AΦB $=_{Df}$□（¬A∨¬B）。如果用“严格蕴涵”给下定义的话，其形式为：AΦB $=_{Df}$A$\longrightarrow\!\!\!\!3$¬B。两个定义等值。

二 模态命题

在上面讨论模态概念时，事实上已经涉及到了模态命题。这里只是将模态命题大致分为两类来讲：一元模态命题和二元模态命题。

(一)一元模态命题 “□”、“¬□”“◇”、“¬◇”等称为一元模态概念，它们的特点是冠于简单命题或复合命题之前。当我们用“P”代表任意命题的时候①，那么“□p”、“¬□p”、“◇p”、“¬◇p”等就是一元模态命题。在模态逻辑中，它们是最基本的命题，它们之间的关系也是模态推理的基础。

(二)二元模态命题 “$\longrightarrow\!\!\!\!3$”、“≡”、“○”、“∅”等称为二元模态概念，它们的特点一般说来是处于简单命题或复合命题之间(当然也有放在前面处理的)。当我们用“P”和“q”代表任意命题的时候，那么“p$\longrightarrow\!\!\!\!3$q”、“p≡q”、“p○q”、“p∅q”等就是二元模态命题。

① 在上面讨论定义问题时，我们使用的是“A”、“B”等元语言符号；在这里讨论命题问题时，我们使用的是“p”、“q”等对象语言符号。

三 模态语义

和其他逻辑系统一样，模态逻辑中的符号语言都需要有一定的解释，否则就成了一些无意义的笔划。所谓解释，就是规定符号语言指称什么事物，或者规定它取什么值，值域如何。对“解释”问题的研究称为语义研究。如果超越于解释，只是独立地对符号语言本身形式特点问题进行研究，就称为语形研究。

（一）“必然”与“可能”

为了深入理解模态概念，就需要引入“可能世界”的概念。“可能世界”是由莱布尼茨最先提出来的。在他看来，凡不违反逻辑，能够为人们所想象的情况或场合，都是可能世界。即使主观设想、幻想得如小说或神话中的虚构情节一样，它们也都是可能世界，因为它们都能为人们所想象。至于我们生活着的现实世界，那只是无穷多的可能世界中的一个。我们规定：

必然＝在所有可能世界里都真。

可能＝在某些可能世界里都真。

对于“必然”和“可能”命题的真假值，可以用真值表的方法确定下来。

首先看“必然”命题。比如：□（p⟶q）。我们假定p、q两个命题可能有的真值是：真，真；假，真；假，假。那么可用下面的真值表表示：

p	q	p⟶q	□（p⟶q）
真	真	真	真
假	真	真	真
假	假	真	真

在这里，“p⟶q”在所有的可能世界里都是真的，因而“□（p⟶q）”是真的。然而这个真值表没有穷尽p、q的所有可能真假组合，缺少p真q假，所以这个表只能称作“部分真值表”。如

果我们把p、q的所有可能真假组合都列出来，也就是说，“p⟶q”并非在所有可能世界里都真，那么“□（p⟶q）”的真值情况就是另一个样子：

p	q	p⟶q	□（P⟶q）
真	真	真	假
真	假	假	假
假	真	真	假
假	假	真	假

由于表中穷尽了p、q的所有可能真假组合，所以此表称作“完全真值表”。在其中，“p⟶q”有真有假，即并非在所有可能世界里都真，所以“□（p⟶q）”只能是假的。它不管p、q的实际真假值如何。

其次看“可能”命题。比如：◊（p⟶q）。它的完全真值表是：

p	q	p⟶q	◊（p⟶q）
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	真	真
假	假	真	真

这就是说，“◊（p⟶q）”只要求在有的可能世界里是真的，那它就是真的。它也不管p、q的实际真假值如何。

“并非必然”和“并非可能”与上述情况类似。如果我们只用“p”代表任意命题，则列综合表如下：

p在可能世界里	□p	◊p	¬□p	¬◊p
都　真	真	真	假	假
都　假	假	假	真	真
有真有假	假	真	真	假

（二）“严格蕴涵”与“严格等值”。

先说“严格蕴涵”。$p \mathrel{-\!\!\!3} q$在什么情况下是假的呢？从前面的定义中我们得到，$p \mathrel{-\!\!\!3} q = \Box(p \longrightarrow q)$，而在前面的语义分析中我们发现，$\Box(p \longrightarrow q)$（即$p \mathrel{-\!\!\!3} q$）在完全真值表中均假，因为它包含着p真q假的情况，这情况使$p \longrightarrow q$为假，或者说，在可能世界中只要包含着p真q假的情况，$p \mathrel{-\!\!\!3} q$则假，否则皆真。或者说，只有在下述部分真值表中$p \mathrel{-\!\!\!3} q$才真：

p	q	$p \mathrel{-\!\!\!3} q$
真	真	真
假	真	真
假	假	真

再说“严格等值”。$p \equiv q = \Box(p \longrightarrow q) \wedge \Box(q \longrightarrow p)$，类似上述分析，在可能世界中只要包含p真q假或q真p假的情况（比如在完全真值表中），$p \equiv q$则假，否则皆真。或者说，只有在下述部分真值表中$p \equiv q$才真：

p	q	$p \equiv q$
真	真	真
假	假	真

（三）“相容”与“并非相容”

“相容”是：$p \bigcirc q = \Diamond(p \wedge q)$。因此在可能世界中只要有p、q都真，$p \bigcirc q$则真；没有p、q都真，$p \bigcirc q$则假。“并非相容”是：$p \Phi q = \Box(\neg p \vee \neg q)$。其真假值与$p \bigcirc q$正相反。列表如下：

p、q在可能世界中	$p \bigcirc q$	$p \phi q$
有都真	真	假
无都真	假	真

第三节　模态逻辑演算

一　模态命题演算

模态命题演算有一套复杂的系统和许多子系统。在一定条件下，演算系统可以扩大，比如，如果P系统是M系统的子系统，那么P系统可以扩充为M系统，二者等价。下面简要介绍一下刘易斯创立的S_5系统。S_5系统的原始基础由下列几个部分构成：

（一）初始符号

1.命题变项：p，q，r，p_1，……；

2.组合指示号：（，）；

3.一元联结词：$\neg$，$\Box$，$\Diamond$；

4.二元联结词：$\longrightarrow$。

（二）形成规则

1.命题变项是合式公式；

2.若A是合式公式，则$\neg A$、$\Box A$、$\Diamond A$也都是合式公式；

3.若A和B是合式公式，则$A\longrightarrow B$也是合式公式；

4.一个表达式是合式公式，当且仅当它能按照上列规则，经有穷步骤构成。

（三）公理

公理1　$p\longrightarrow(q\longrightarrow p)$；

公理2　$(p\longrightarrow(q\longrightarrow r))\longrightarrow((p\longrightarrow q)\longrightarrow(p\longrightarrow r))$；

公理3　$(\neg p\longrightarrow\neg q)\longrightarrow(q\longrightarrow p)$；

公理4　$\Box p\longrightarrow p$；

公理5　$\Box(p\longrightarrow q)\longrightarrow(\Box p\longrightarrow\Box q)$；

公理6　$\neg\Box p\longrightarrow\Box\neg\Box p$。

（四）推理规则

1.分离规则；

2.如果A是定理，则$\Box$A也是定理；

3.定义置换规则。

显然，凡命题演算中的定理，都是S_5的定理。在S_5系统中还有一系列定理证明。现举几例如下：

定理1　$p \longrightarrow \Diamond p$

证明：

（1）$\Box\neg p \longrightarrow \neg p$（公理4）

（2）$(\Box\neg p \longrightarrow \neg p) \longrightarrow (p \longrightarrow \neg\Box\neg p)$（命题演算定理）

（3）$p \longrightarrow \neg\Box\neg p$（（1）、（2）分离规则）

（4）$p \longrightarrow \Diamond p$（（3）定义置换规则$\Diamond A =_{Df} \neg\Box\neg A$）

定理2　$p \longrightarrow \Box\Diamond p$

证明：

（1）$\neg\Box\neg p \longrightarrow \Box\neg\Box\neg p$（公理6）

（2）$p \longrightarrow \Diamond p$（定理1）

（3）$p \longrightarrow \neg\Box\neg p$（(2)定义置换规则$\Diamond A =_{Df} \neg\Box\neg A$）

（4）$(\neg\Box\neg p \longrightarrow \Box\neg\Box\neg p) \longrightarrow ((p \longrightarrow \neg\Box\neg p) \longrightarrow (p \longrightarrow \Box\neg\Box\neg p))$（命题演算定理）

（5）$(p \longrightarrow \neg\Box\neg p) \longrightarrow (p \longrightarrow \Box\neg\Box\neg p)$（(1)、(4)分离规则）

（6）$p \longrightarrow \Box\neg\Box\neg p$（(3)、(5)分离规则）

（7）$p \longrightarrow \Box\Diamond p$（(6)定义置换规则$\Diamond A = D_f \neg\Box\neg p$）

在S_5系统里，定理的推导还可以继续进行下去。同命题逻辑中的推导相似，我们就此从略。从S_5系统的原始基础和若干定理推导，便可略知S_5系统的轮廓。

二　模态谓词演算

50年代以后，不少逻辑学家对模态谓词逻辑进行了深入的研

究，构造了许多不同的模态谓词演算系统。一般地说，把模态命题演算系统与一般谓词演算系统结合起来，就能得到模态谓词演算系统。我们在此只介绍一下T系统与F系统结合而得到的FT系统，而且只介绍两个定理证明，其中的每一步根据都来自以前系统，在此不做详细说明，人们只了解个大致意思即可。FT系统的原始基础由下列几个部分构成：

（一）初始符号

1.狭谓词演算系统F的初始符号；

2.模态命题演算系统T的初始符号。

（二）形成规则

1.F的形成规则；

2.T的形成规则。

（三）公理

1.F的公理：A1—A6；

2.T的公理：K和T。

（四）推理规则

1.F的推理规则；

2.T的推理规则。

下面是两个定理证明：

定理1 $\Box(x)(F_X \wedge G_X) \longleftrightarrow \Box(x)F_X \wedge \Box(x)G_X$

证明：

（1）$(x)(F_X \wedge G_X) \longleftrightarrow (x)F_X \wedge (x)G_X$ （F_5）

（2）$\Box(x)(F_X \wedge G_X) \longleftrightarrow \Box((x)F_X \wedge (x)G_X)$ （（1）与DR4）

（3）$\Box(x)(F_X \wedge G_X) \longleftrightarrow \Box(x)F_X \wedge \Box(x)G_X$ （（2），TK·1与DR1）

定理2 $\Diamond(\exists x)(F_X \vee G_X) \longleftrightarrow \Diamond(\exists x)F_X \vee \Diamond(\exists x)G_X$

证明：

(1) $(\exists x)(Fx \vee Gx) \longleftrightarrow (\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$ (F19)

(2) $(\exists x(Fx \vee Gx) \longrightarrow (\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$((1)与$\longleftrightarrow$定义，再与T13)

(3) $(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx \longrightarrow (\exists x)(Fx \vee Gx)$ ((1)与$\longleftrightarrow$定义，再与T14)

(4) $\Diamond(\exists x)(Fx \vee Gx) \longrightarrow \Diamond((\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx)$ ((2)与DR6)

(5) $\Diamond(\exists x)(Fx \vee Gx) \longrightarrow \Diamond(\exists x)Fx \vee \Diamond(\exists x)Gx$ ((4)、TK·14与DRI)

(6) $\Diamond((\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx) \longrightarrow \Diamond(\exists x)(Fx \vee Gx)$ ((3)与DR6)

(7) $\Diamond(\exists x)Fx \vee \Diamond(\exists x)Gx \longrightarrow \Diamond(\exists x)(Fx \vee Gx)$ ((6)、TK·14与DR1)

(8) $\Diamond(\exists x)(Fx \vee Gx) \longleftrightarrow \Diamond(\exists x)Fx \vee \Diamond(\exists x)Gx$ ((5)、(7)与T22，再与$\longleftrightarrow$定义)

从总的情况说，跟模态命题逻辑相比，模态谓词逻辑还不够完善，尚有待于进一步发展。

第四节　非标准模态逻辑的概况

以上简介的都是标准模态逻辑，它主要讲逻辑必然与逻辑可能的问题，比如刘易斯的模态逻辑系统中有$\Box p \longrightarrow p$和$p \longrightarrow \Diamond p$（“必然”强于“实然”，“实然”强于“或然”），以及$\Box p \longleftrightarrow \neg\Diamond\neg p$和$\Diamond p \longleftrightarrow \neg\Box\neg p$等定理。这些都是标准模态逻辑。后来又形成一些非标准模态逻辑系统，它们主要有道义逻辑、认识逻辑和时态逻辑等。下面我们对这些逻辑只简要地介绍一些基本概念和命题，至于形式公理系统或演绎推理系统，则因限于

篇幅不再介绍。

一 道义逻辑

在日常语言中时常有一些语句包含着“必须”、“允许”、“禁止”等语词。这些语词表示着“道义”、“义务”、“伦理”或“规范”等模态概念，也称作“道义模态词”。当然，包含着道义模态词的命题就称作“道义命题”。道义命题形式很多，其中有三种是基本的。

（一）必须命题　这是陈述必须履行的行动或必须实现的事件状态的命题。模态词“必须”可用符号“O”表示，因此“Op”读作“p是必须的”。在汉语中，语词“应该”、“一定”、“有……义务”等概念与“必须”相似，也都可以用模态词“O”表示。但是“必须”与“应该”还稍有差别，“必须”约束力较强，具有强制性；“应该”的约束力较弱，一般不具有强制性。但在法律上具有同样的约束性。法律中有关义务的规定都是必须命题。

（二）允许命题　这是陈述允许履行或允许实现的行动或事件状态的命题。模态词“允许”可用符号“P”表示，因此“Pq”读作“q是允许的。”在汉语中。“可以”、“准予”、“有权”等概念与“允许”相似，也都可以用模态词“P”表示。由法律条文明文规定的命题都是允许的，因此表达权利的条文都是允许命题。

（三）禁止命题　这是陈述从一定规范角度看禁止履行或禁止实现的行动或事件状态的命题。模态词“禁止”可用符号“F”表示，因此“F_r”读作“r是禁止的”。在汉语中，“不得”、“不准”、“不许”等概念与“禁止”相似，也都可以用模态词“F”表示。由法律条文明文规定的犯罪或侵权行为都是禁止的，因而经常用禁止命题来限制这些行为。

我们可以用命题逻辑联结词把道义命题结合为复合命题，比如：

$Op \longrightarrow p$

$O\neg p \longleftrightarrow \neg p$。

有些道义命题是附加条件的，称作相对道义命题或条件道义命题。相对必须命题形式为"O（p/q）"，读作"在q条件下，p是必须的"。相对允许命题形式为"P（p/q）"，读作"在q条件下，p是允许的"。相对禁止命题形式为"F（p/q），读作"在q条件下，p是禁止的"。相对道义无差别命题形式为"I（p/q）"，读作"在q条件下，p是道义上无差别的"，如"如果这件事已经结束了，那么你可以来，也可以不来"。相对道义命题也可以通过命题联结词而结合成复合命题，如：

$\neg(O(p/r) \wedge O(\neg p/r))$

$p(p \vee q/r) \rightarrow P(p/r) \vee P(q/r)$

二 认识逻辑

人们在认识过程中会涉及到"知道"、"相信"、"怀疑"、"反驳"、"可证"、"可接受"、"可信"等语词，它们称作认识模态词，而包含着这种语词的命题就称作认识模态命题或认识命题。我们引入符号"K"表示"知道"，"Kap"表示"a知道p"；"B"表示"相信"，"Bap"表示"a相信p"；"p"表示"对……所知道的一切是可能的"，"Pap"表示"对a所知道的一切，p是可能的"；"C"表示"跟……所知道的每件事是相容的"，"Cap"表示"p是跟a所知道的每件事相容的"；"A"表示"可接受"，"Aap"表示"a可接受p"；"D"表示"怀疑"，"Dap"表示"a怀疑p"。

我们可以用命题逻辑联结词把认识命题结合为复合命题，如：$Kap \vee Ka\neg p$（"a知道是不是p"），$P \wedge \neg Kap$（"a不知

道p”），$\neg Kap \wedge \neg Ka \neg p$（“a不知道是不是p”），$Bb(p \wedge \neg Bap)$（“b相信‘a不相信p’”）。再如：

$$Ka(p \longrightarrow q) \longrightarrow (Kap \longrightarrow Kaq)$$

$$Bap \wedge (p \longrightarrow \neg q) \longrightarrow \neg Baq$$

$$KaBap \longrightarrow Bap$$

都是普遍有效的认识命题形式。上述的认识命题中都包含认识主体（a、b等），称作相对认识命题；如果不包含认识主体，只表现个体常项的认识命题，就称作绝对认识命题。我们引入符号“Lk”表示“可靠地知道”，“Lkp”表示“p是可靠知道的”；“Mk”表示“是可信的”，“Mkp”表示“p是可信的”；“Lb”表示“相信的”，“Lbp”表示“p是被相信的”；“Mb”表示“似可信的”，“Mbp”表示“p是似可信的”。如下命题形式都是普遍有效的：

$$P \longrightarrow Mkp$$

$$Mk(p \vee q) \longrightarrow Mkp \vee Mkq$$

$$Lkp \longrightarrow p$$

$$\neg (Lbp \wedge Lb \neg p)$$

$$Lkp \longrightarrow Mkp$$

三　时态逻辑

人们在日常语言中总要涉及时态问题，是“过去”呢？还是“现在”或“将来”呢？这也是一种模态概念或称时态词。含有这种时态词的命题就是时态命题。我们引入符号“H”表示“过去”，“Hp”表示“过去p”；“T”表示“现在”，“Tp”表示“现在p”；“F”表示“将来”，“Fp”表示“将来p”。其实“过去”和“将来”都有那个时候的“现在”问题，因此在实际应用中可以把“现在”（“T”）省略。于是只剩下两个时态词：H和F。

这样我们就可以初步刻划一些自然的时态语句。比如"并非我曾经到过上海"可表示为"$\neg Hp$"，"如果明天不下雨，我们就去故宫或北海"可表示为"$F(\neg p\longrightarrow(q\vee r))$"等等。这是时态词的单一出现；时态词还可以重叠出现，比如"曾听说过将来这里建工厂"可表示为"HFp"。

关于时态问题还有一种复杂情况："过去"和"过去总是"、"将来"和"将来总是"的情况是不完全一样的，比如"他过去曾是教师"和"他过去一直是教师"、"他将去一趟广州"和"他将来定居广州"就不完全一样。这里有个"时点"（短时时间）和"时段"（长时时间）的问题；当然，时点和时段也只具有相对的意义。我们引入符号"A"表示"过去总是"，"Ap"表示"过去总是p"；"G"表示"将来总是"，"Gp"表示"将来总是p"。并且给出下述定义：

$$Ap = Df\neg H\neg p$$

$$Gp = Df\neg F\neg p$$

在这里，$\neg H\neg p$是说p曾经决不是假的，因而曾经总是真的，比如说"并非他过去某个时候不是教师"就等于说"他过去一直是教师"；而Hp则只是说p在某个时候曾是真的。另外，$\neg F\neg p$是说p将来决不是假的，因而将来总是真的，比如说"并非他将来某个时候不居住在广州"就等于说"他将来定居广州"；而Fp则只是说p将在某时是真的。这样，我们就有了四种包含不同时态词的命题：Hp（过去p），Ap（过去总是p），Fp（将来p），Gp（将来总是p）。其中，肯定了"Ap"也就能肯定"Hp"，而肯定了"Hp"却不一定能肯定"Ap"；另外，肯定了"Gp"也就能肯定"Fp"，而肯定了"Fp"却不一定能肯定"Gp"。因此得到公式：

$$Ap\longrightarrow Hp$$

$$Gp\longrightarrow Fp$$

我们借助“Ap”和“Gp”就可以刻划命题中的全部时间断定，即p在所有时间上都是真的，可用下述公式表述：

$$Ap \wedge p \wedge Gp$$

我们还可以把模态词□和◇引入时态命题，比如“如果他在下月预考中及格，那么他将考上大学是可能的”，符号化为“Fp ⟶ ◇Fq”；“如果点燃火药，那么爆炸将发生是必然的”，符号化为“S⟶F□r”。

我们还可以把量词（x）和（∃x）引入时态命题，比如“有的人将来要当兵”，符号化为“（∃x）（Sx∧FBx）”；“所有的人都曾经是小孩”，符号化为“(x)（Sx⟶HCx）”。

对于以上的义务、认识和时态逻辑问题，我们只介绍一些基本概念和命题，而关于形式公理系统却没能介绍。我们在此只是说明，这些逻辑都具有各自的形式公理系统，即从初始概念、形成规则、推理规则、公理和定义出发，推理论证出包含着若干定理的公理系统。这里不再详述。

第六章 概率逻辑

上面第二章第四节我们已经介绍过概率代数。现在进一步介绍当代的概率逻辑。

概率逻辑（或概率归纳逻辑，或现代归纳逻辑），它的特点是运用现代的逻辑与数学工具，主要是数理逻辑与概率理论，对归纳逻辑、归纳方法进行形式化、数量化的研究。这类逻辑系统的研究开端于本世纪的20年代，兴旺于50到60年代。虽然它还存在着一些困难和分歧，导致一些新的归纳逻辑系统的建立和进展，但是概率逻辑至今仍对归纳逻辑、归纳方法、科学方法论、科学哲学的研究起着重大的影响。

概率逻辑的派别相当多，其中最主要的有频率论、逻辑论、私人论等等。这些归纳理论都是在概率演算的框架内构造的，然而它们对"概率"这个概念的理解却各不相同，以致它们确定基本概率的方法也是不同的。比如频率论把概率解释为频率的极限，而所谓一个归纳推理是成立的，实际上就是指有关的命题序列存在着一定的频率极限值，即满足一定的概率值；逻辑论则认为频率论的概率解释属于统计学概念，而作为逻辑学概念，"概率"应被理解为一个命题由另一个（或另一些）命题所证明的程度，也称之为"确证度"，它是已有的证据与提出的假设之间的函数关系；私人论的基本特征则是把概率解释为个人的相信程度，这种概率基本上因人而异。我们在此重点介绍频率论和逻辑论概率逻辑。

第一节　概率论与逻辑

前面讲概率代数的时候，我们已经讲过了"等可能性"和"频率"两种解释。人们通过对随机现象的数学本质的进一步研究，对概率作出了公理化的处理，并由此得到新的更严格的定义。

概率的公理化定义为：

设A为随机事件，P（A）为一实函数，且具有下列性质：

（1）$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

（2）$P(\Omega)=1$；

（3）对互不相容的随机事件序列A_1，A_2，……，有

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} An\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(An)。$$

这样，概率的公理化定义便包含了概率的古典定义。

概率还具有下列性质：

（1）对任何事件A，有

$P(\overline{A})=1-P(A)$；

（2）不可能事件的概率为0，即$P(\Phi)=0$；

（3）设A、B为二事件，且$A \supseteq B$，

则　$P(A-B)=P(A)-P(B)$，

且　$P(A) \geqslant P(B)$；

（4）对任意二事件A、B，有

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。

然后又产生了条件概率的概念：

设A、B是两个随机事件，且$P(B)>0$，则

$P(A/B)=P(AB)/P(B)$。

此式称为在事件B发生的条件下，事件A发生的概率（或事件A对于事件B的条件概率）。

此外，概率论的乘法定理、全概率公式和逆概率公式（贝叶斯公式），在概率论的计算中起着重要的作用，对概率逻辑有重大的影响。

乘法定理：

设A、B为两事件，P（AB）>0，则

P（AB）=P（A）P（B/A）。

全概率公式：

设H_1，H_2，……为互不相容事件，且$H_1+H_2+\cdots\cdots=\Omega$；又事件A能且只能同$H_1$，$H_2$，……中的一个同时发生，就是说，事件$A=AH_1+AH_2+\cdots\cdots$；则

$$P(A)=\sum_{n=1}^{\infty}P(Hn)P(A/Hn)。$$

逆概率公式（贝叶斯公式）：

设H_1，H_2……为互不相容事件，且$H_1+H_2+\cdots\cdots=\Omega$；又事件A能且只能同$H_1$，$H_2$，……中的一个同时发生，且P(Hi)>0，P（A）>0；则

$$P(Hm/A)=\frac{P(Hm)P(A/Hm)}{\sum_{i=1}^{\infty}P(Hi)P(A/Hi)}。$$

这样，如概率演算的公理化能同时满足数学和逻辑上的要求，如概率演算的所有公理都可以证明是永真式，那么这样的公理系统就可以为概率逻辑提供一个可取的模型。至于归纳逻辑为什么会与概率论发生联系从而产生出概率逻辑，我们可以从总的方面作如下理解：

“概率”概念分为两种情况：一种是数学的概率概念，它是运用数理统计的方法和数学语言来进行概率的演算；另一种是逻辑学的概率概念，它是指科学语言所说“可能的”、“或然的”、“可推测的”等等的意思；而数学的概率概念是陈述事件的性质，逻辑学的概率概念是陈述命题的性质。比如概率逻辑可以通过二分法或三分法等而转化为二值逻辑或三值逻辑等。这种转化在于要规定一个分界值p。如p值为1/2，则有

如$P(a)>p$，则a为真；

如$P(a)\leqslant p$，则a为假。

三分法则是选定二个分界值p_1和p_2，则有

如$P(a)\geqslant p_2$，则a为真；

如$P(a)\leqslant p_1$，则a为假；

如$p_1<P(a)<p_2$，则a为未定。

当然，归纳逻辑应该如何对概率论进行具体的解释和运用，直到目前也仍旧处于摸索和探讨之中。

第二节　频率论概率逻辑

传统归纳逻辑曾受到18世纪英国怀疑论哲学家休谟的批判。他的论证表明两点：一是归纳结论只能是或然性的，而不可能是必然性的；二是归纳结论的真实性是得不到任何逻辑证明的，比如从“过去太阳一直从东方升起”并不能逻辑地必然推出“明天太阳也从东方升起”。这就成为著名的归纳合理性问题，也叫作休谟难题。后来，德国哲学家莱欣巴赫以休谟难题为出发点，构想了频率论概率逻辑系统。

莱欣巴赫认为对“概率”的数学解释和逻辑学解释既有不同之处又有相同之处，而相同之处就在于“频率”问题。他说：“如果我们也用频率来解释逻辑的概率概念，两个概念就会变成

同型的，数学的概念是用事件的频率来解释，而逻辑的概念则用关于事件的命题的频率来解释。”（《经验与预言》，英文版，第302页）这样，概率逻辑就是命题序列的逻辑，可以看成是命题逻辑的推广。莱欣巴赫的基本思想是认为归纳推理所涉及的不是一个单独的命题，而是一组命题的系列。所以，他认为应在归纳逻辑中把“命题”推广为“命题系列”这个概念。如果分析这个命题系列，就会看到：一方面，在这个系列中，总存在着一组一组的命题之间的关系。设有两类命题，一类是作为证据的命题集合A，它的元素为x_1，x_2，……，x_i，……，x_n；另一类是作为假设的命题集合B，其元素为y_1，y_2，……，y_i，……，y_n（均约定取有穷项）。即：

$$A=\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_i, \cdots\cdots, x_n\}$$

$$B=\{y_1, y_2, \cdots\cdots, y_i, \cdots\cdots, y_n\}$$

之所以B是一种假设，那是因为莱欣巴赫认为，既然归纳结论的真实性不可能被证明，那么就应当把归纳结论仅仅看成是一种假设，而证明归纳结论的真实性的问题就变为证明归纳结论是一个“最佳假设”的问题。事实上，在任意的两个相应的命题x_i与y_i之间总有一定的关系。至于是什么样的关系，只能在这一组一组的命题序列中才能确定。所以另一方面，必须考虑命题的序列。通过一系列的实验，可以发现在证据集A与假设集B之间存在着一种关系，可称为“概率蕴涵”，表示为：

$$(\forall x_i)(\forall y_i)(x_i \in A \ni_p y_i \in B)$$

可简写为：

$$(A \ni_p B)$$

读作“A以概率P蕴涵B”，可定义为：

$$(A \ni_p B) =_{Df} P(A, B)=p$$

由此可见，A、B这两类或这两个命题序列之间存在着一种蕴涵关系，这种关系是一种概率关系，也就是说，当A序列关系到B

序列时才具有一定的概率。其中P是这种概率蕴涵的概率度。所以，莱欣巴赫是着眼于命题序列之间的关系，而不是着眼于单独命题本身的性质来研究归纳逻辑的。

进一步就要对这种概率关系作出一种解释。在这方面，他采用了典型的数学的概率概念，对概率给予频率的解释，把概率理解为频率的极限。所谓一个归纳推理是成立的，实质上就是指有关的命题序列存在着一定的频率极限值，即满足一定的概率值。至于在这个序列过程中要对某一组命题加以确定，只能解释为根据有关概率的一种"认定"（posit）。在认定中可以选择"最优认定"，就整个序列而言，存在着"渐近认定"。这样在莱欣巴赫那里，用"认定"来替换了对于归纳推理的证实问题。

由于归纳推理是一种与概率度相关的渐近认定，那么归纳命题的取值即是由列举其元素来确定的，也就是用外延的方法来确定的，但一般不是二值的，尤其是从命题序列的值来看，必然是多值的。因此，归纳逻辑应该建立在多值逻辑的基础上，只有在给出某种分界值的情况下，这种多值逻辑才变换为对应的二值逻辑。

由上可知，莱欣巴赫的概率逻辑系统，从数学上说，运用了数学概率论的频率概念；从逻辑学上说，它是一种外延的、关系的、多值的逻辑。这就是这一系统的特点。

第三节 逻辑论概率逻辑

逻辑论概率逻辑是由奥地利哲学家卡尔纳普创立的。在他看来，从概率概念的历史来看，应把概率分为两种，即概率$_1$与概率$_2$。概率$_1$是指概率的逻辑概念，概率$_2$是指概率的统计概念。统计概率是由相对频率来确定的，这就是通常的数学的概率论所依据的基本观点，而莱欣巴赫就是运用这种概率观点来处理归纳逻

辑的。但是在卡尔纳普看来，用概率的频率的解释是不能处理归纳问题的。他认为要用概率$_1$来处理，因为它是一种逻辑概率，具有着分析的性质，能够作为归纳推理的基础。卡尔纳普的概率逻辑的一个基本概念就是“确认度”（degree of Confirmation)，用C来表示。C是已有的证据e与提出的假设h之间的函数关系，用C（h，e）来表示。在他看来，h与e之间应该是一种逻辑关系，它并不直接依赖于事实的观察，也不依赖于相对频率，而是一种逻辑的分析关系，类似于蕴涵而又表现为一定的数值，这就是概率$_1$。

为了构造出概率逻辑系统，他第一步是构造了一个演绎的语言系统L，在这个基础上，作为第二步，才构造出自己的概率归纳逻辑系统。特别应该指出的是，他完全是在演绎逻辑的基础上来构造归纳逻辑的，演绎逻辑的方法在归纳逻辑研究中的运用表现得十分明显。下面只作一个简要的介绍。

一　语言系统L

这个系统的个体域包括无穷系统L_∞、有穷系统L_N。

以下给出L系统的语法与语义基础：

（一）初始符号（包括个体常项、个体变项、初始谓词、二元关系、联结词及其他符号）；

（二）形成规则；

（三）真值规则；

（四）状态描述（用以完全描述给定个体域的一切可能状态的语句集）；

（五）相关性质族和相关初始谓词族；

（六）语句的值域（使一语句在其中成立的那些状态描述集）；

（七）给出若干定义；

（八）分子谓词（由初始谓词及联结词构成）；

（九）划分（将个体域中的一切个体划分为互斥而不重叠的分子谓词集）；

（十）结构描述（把有关的状态描述按顺序列成的析取式）。

二　概率化和定量化的归纳逻辑系统

这里主要阐述演绎系统L_N。就逻辑方面说，L_N系统是一种外延的系统。为了构造出形式化的归纳逻辑，就根据所确定的Q性质对值域作出划分，由语句i所满足的状态描述的量度函数m的值来确定确认度C的值。但就数学方面说，C值不是概率$_2$（统计概率），而是作为一种逻辑的归纳概率的概率$_1$的值。

（一）L_N中的正则量度函数m

定义：m（j）=Df对于语句j，使j成立的那些状态描述Ψ的总和m（Ψ）。这是一个数值函数。

m是正则的，要满足下列二条件：（1）对于L_N中的每一状态描述Ψ，m（Ψ）取正实数值；（2）L_N中对于所有的状态描述Ψ的m值i总和为1。

由m值可见是外延的关系，由此定义：

（二）L_N中的正则确认函数C（简称确认度）

定义：确认度C是表示证据的e语句与表示假设的h语句之间的一种函数关系，是由正则量度函数m来定义的：

$$\begin{cases} C(h,\ e)=\dfrac{m(e\wedge h)}{m(e)} & \text{当}m(e)\neq 0; \\ C(h,\ e)\text{无值} & \text{当}m(e)=0。\end{cases}$$

确认函数C是正则的，要满足上述正则量度函数m所满足的同样条件。

几种特殊的C函数

1．L_∞系统中的m函数及C函数的值各自定义为其相关有穷

系统的极限值，可证：

$$\infty C(h,e)=\frac{\infty m(e\wedge h)}{\infty m(e)}。$$

2．空确认Co：

$$Co(j)=_{Df}C(j,\ t)。$$

可证：$Co(j)=m(j)$。

证：$Co(j)=C(j,\ t)=\frac{m(t\wedge j)}{m(t)}=m(j)$。

注意：卡尔纳普一再强调C函数是一个语义概念。

（三）L部分蕴涵

卡尔纳普的L系统与概率逻辑系统均是以外延为基础的，它们均与值域相关。为了说明演绎逻辑与归纳逻辑的关系与区别，卡尔纳普指出，在演绎逻辑中是蕴涵关系，而在归纳逻辑中是部分蕴涵关系。用图6—1表示：

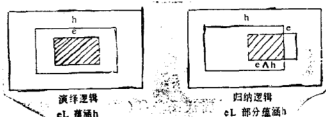


图 6—1

由图6—1可知，在L系统中“eL蕴涵h”是指e的值域完全包含在h的值域中，而在归纳逻辑中，则是“eL部分蕴涵h”。如上右图所示，

$$C(h,e)=\frac{m(e\wedge h)}{m(e)}=\frac{3}{4},$$

是指e的值域的3/4包含在h的值域中。

但要注意，卡尔纳普虽从外延、从值域出发来处理演绎的与归纳的逻辑，但他是将对象语言与语义的元语言区别开的。因

此，他强调语句的值域与事实无关，只与语句的意义有关。后者是由有关语言系统的语义规则所确定的。一旦给出这些语义规则，则其值域关系就被确定。

（四）相关系数与“可预见的”

在归纳过程中，不仅与e、h有关，而且与新的观察（语句）i是否加强e而支持h相关，由此定义

$$\frac{C(h, e\wedge i)}{C(h, e)}\begin{cases} >1 & \text{正相关} \\ =1 & \text{无关} \\ <1 & \text{负相关} \end{cases}$$

为相关系数。如果在i之后实现e∧h，则i是可预见的。

根据以上简略介绍我们看到，卡尔纳普关于归纳和演绎之间关系的研究是很有意义的。证据e和假设h之间的关系是归纳的而不是演绎的，不存在从e到h的演绎过程；但是有一种概率$_1$的归纳过程却将e和h联结起来。在演绎逻辑中，从“eL蕴涵h”和“e真”，能必然得到“h真”；但在归纳逻辑中，从“eL部分蕴涵h”和“e真”，并不能必然得到“h真”。因此，归纳不是演绎。但是，从证据e到假设h的归纳过程可以概率化和定量化，具体说，可以用演绎方法来研究确认度（证实程度或确认函数）C，从而表现为概率$_1$。归纳逻辑可以用增加C函数的定义的方法从演绎逻辑构造出来，所以归纳逻辑预设了演绎逻辑。归纳逻辑中的定理（如“CCh，e）=3/4”）是通过演绎得到的。这样一来，大量的归纳推理就具有演绎推理的形式。因此，归纳可以转化为演绎，转化的条件是：对归纳过程（从证据e到假设h的过程）可以进行量的测定。长期以来，人们只把归纳当成经验方法，忽略了可以用演绎方法研究归纳的问题。然而，卡尔纳普的成果却给人们提供了很好的借鉴。

第四节 困难与前景

正象演绎逻辑在发展过程中遇到最大序数悖论、罗素悖论等等一样，归纳逻辑在它的发展过程中也遇到了不少悖论，较有名的有三个：亨普尔的确证可信悖论、古德曼的确证标准悖论和基柏格的确证处理悖论。

1945年美国学者亨普尔指出，如下三个关于确证概念的显然可信的假定是不能并立的：

一、如果一个概括化的条件命题的前件和后件都得到满足，这就至少在某种程度上确证了该概括命题。例如，一个既是乌鸦又是黑色的客体确证着概括命题“任何事物，如果它是乌鸦，它就是黑色的”。

二、逻辑上等值的命题同等程度地为同一证据所确证。因此，确证“任何事物，如果它是乌鸦，它就是黑色的”这一命题的证据，必定也确证着与它等值的逆否命题”任何事物，如果它不是黑色的，它就不是乌鸦”。

三、一个典型的既非黑色的又非乌鸦的客体，比如说一块白手绢，却并不确证“任何事物，如果它是乌鸦，它就是黑色的”（尽管它确证着与此概括命题等值的逆否命题）。

1953年美国学者古德曼提出另一个关于相同的确证标准问题。假定在某一时刻t以前所见到的祖母绿宝石都是绿色的。于是在时刻t根据这个标准，我们以往对祖母绿的观察确证了“所有祖母绿都是绿色的”这一假说。但是同样这些观察也确证了所有祖母绿都是绿蓝色的，而“绿蓝色的”这个新奇的谓词被定义为：它适用于一切只是在t时刻之前被考察到是绿色的东西以及其它只是蓝色的东西。因此，我们上述观察似乎同样好地确证了两个不一致的预见：“此后考察的一切祖母绿都是绿色的”和

"此后考察的一切祖母绿都是蓝色的"。

1961年基柏格提出当假设已得到证据的满意的确证后怎样处理的问题。这里又有三个明显可信的假定不能并立：

一、接受任何如下的假说H是合理的：它经过详尽考察（根据可用的证据）拥有巴斯噶概率1—∈（∈是一个正数，你想让它有多么小，它就可以有多么小）。

二、接受一组可合理地接受的假说的逻辑推断是合理的。

三、接受一组不一致的假说是不合理的。在下面这个事例中，这三个假定的确是不能并立的。假定有一种彩票共卖出一百万张，而其中只有一张能得彩。对于这一百万张彩票中的每一张来说，接受"这张彩票不是中彩的那张"这一假说是合理的。但是这些假说的合取（它等于"没有一张彩票能中彩"）却与另一个假说即"恰好有一张彩票将中彩"不一致，而接受后面这个假说也是合理的。

这些悖论的制约作用在于，一个完善的归纳理论必须能避免或解决所有这些悖论。柯恩从这些悖论出发，考察了与培根传统相对立的各种归纳逻辑理论，指出它们都不能完全摆脱这些悖论。例如，卡尔纳普的归纳逻辑虽然避免了上述前两个悖论，却仍然为第三个悖论击中。为了解决和避免这些悖论，人们提出种种方案。为了提高归纳结论的可靠性程度，人们一方面是避免全称普遍命题，把要确证的假设限制在一定的范围内；另一方面就是对证据提出更充分的要求。近年来，还有些哲学家干脆抛弃了概率演算的框架，而采用其他方法建立归纳逻辑。如柯恩就以一种广义的模态逻辑作为归纳理论的基本结构。虽然这类归纳理论也有不足之处，但却为归纳逻辑的发展开辟了新的途径。总之，归纳逻辑至今远不如演绎逻辑臻于完善，它仍是一个亟待发展的领域。

第七章　演绎逻辑与归纳逻辑

现代逻辑主要是演绎逻辑，而演绎逻辑的构造方法主要是公理方法。现代逻辑同时也非常关心归纳逻辑和科学方法论的研究。但客观上讲来，对归纳逻辑的研究较之对演绎逻辑的研究是大为逊色的。

第一节　演绎理论及其模型问题

演绎同归纳一样，是人们在思维过程中经常运用的推理方法，也是经验自然科学广泛使用的最一般的推理方法。演绎推理是从一般到特殊和个别，是根据一类事物都有的一般属性、关系和本质来推断该类中的个别事物所具有的属性、关系和本质的推理形式和思维方法。演绎推理或称演绎法有各种不同的种类，但根据推理中前提的数量，演绎推理可分为直接推理和间接推理。直接推理是由一个前提推出结论的推理；间接推理是从几个前提中推出一个结论的推理。

作为科学推理的演绎法，它的最基本作用如下：第一，演绎法对于论证理论具有重要的作用，这就是公理系统的演绎法所起的作用。这种演绎法的特点是从理论命题推导出理论命题，对某一个理论命题作出演绎证明。这种方法可以使我们在理论（假说）进行实践的检验之前，对理论（假说）作出某种评价，而且也可以促使理论具有逻辑的严密性。数学学科大都是公理化的演

绎体系，都是从公理演绎出一系列定理，因此数学学科都具有高度的逻辑严密性。其他科学学科也都在自己研究领域中试图运用演绎法从基本定律或原理推导出一系列定律来。第二，演绎法对于解释或预见事实具有重要的意义，这就是假说演绎法所起的作用。这种演绎法的特点是从理论命题推导出事实命题，或是解释已知的事实，或是预见未知的事实。这种演绎法的基本步骤是以一个或多个普遍陈述，如定律、定理、公理、假说等作为理论前提，再加上某些初始条件的陈述，通过演绎法推导出一个描述事件的命题来。比如，利用万有引力定律作为演绎的前提，再加上某一天体的初始位置、初速度、原始角动量、质量等单称陈述，就能计算出该天体任一时刻在天空所处的位置，等等。第三，演绎法对于发现疑难问题具有重要的作用，这就是所谓"证伪演绎法"所起的作用。如上所述，应用假说演绎法，从某理论或假说（H）出发，加上陈述初始条件的命题（C），就可以演绎出事实命题（E）。然后，检查这个事实命题（E）。如果它被观察实验所否定，那么，我们根据充分条件假言推理的规则：否定后件就可以否定前件。这对于提出疑难问题是非常重要的，虽然它还不能达到证伪一个理论，但是发现了问题就能导致原有理论的修改或提出全新的解释性理论。

总之，作为科学推理的演绎法是科学认识中的一种重要的方法。演绎推理是一种从一般推向个别的必然推理，只要演绎推理的前提正确，推理的过程又合乎逻辑规则，那么运用演绎法就一定可以从真的前提得出真的结论。因此，应用演绎可以给予许多理论命题相对的证明，可以解释和预见事实，还可以从推断的被否定而对理由（解释性理论）提出质疑。所有这些都是科学研究中非常基本的活动方式。当然，演绎法也有它的局限性。首先它的大前提是一般原理，这个一般原理本身是需要论证的，并且是其他某种认识方法的结果。因此演绎是以并非演绎的东西作为自

己的源泉的。而且一般只能大致地概括个别，不能完全包括个别的全部。当事物由于发展而出现了一般所没有的特点的时候，当一般只是表现于无数个别事物总和之中的时候，从一般直接地、简单地演绎到个别也就往往不能成功。

演绎理论中十分重要的问题是建立模型问题。模型包括事实模型和理论模型。事实模型，可以说就是我们平常所谓实践检验，即通过典型事实对于某一演绎理论系统进行检验。然而我们这里主要讲理论模型问题。理论模型，简单地说就是一种解释。如果有一种解释使一个公理系统的所有公理都在某个论域中成立，那么这个论域就是该系统的模型。建立演绎理论模型乃是一种确定公理系统的一致性、完全性和独立性的重要的辅助手段。我们把欧几里得几何同双曲几何加以对照，解释一下这话是什么意思。下面是一些对应关系：

欧几里得几何	双曲几何
点	圆内的点
直线	圆内直线的一部分
两个线段的全等性	两个线段的终点与它们同圆的交点的交叉比重合或这些交叉比的倒数相重合
两个角的全等性	通过把指定圆的圆周变成自身之分式平直变换，使两角互变可能
线段的长度	按上述方式形成的交叉比的自然对数的一半

其余一切概念都保持它们在欧几里得几何中原有的意义。例如，A点在B和C之间，或者，A点在直线g上。在上述条件下，欧几里得几何的一切公理，除去平行线公理以外，都在双曲几何的概念中得到满足。欧几里得几何的两条直线，如果经无限延长

永不相交于欧几里得平面上，它们就是平行的。译成双曲几何的语言就是：两条直线，如果永不相交于圆内，它们就是平行的。可是，在欧几里得平面中，经过直线外的一点可以作一条且仅仅作一条直线与该直线平行，而在双曲几何中，经过直线外的一点却可以作无穷多条直线与该直线平行。

这个模型证明了两件事：第一，由欧几里得几何的无矛盾性可以得出双曲几何的无矛盾性；第二，欧几里得平行线公理独立于其余公理。然而，这还没有证明双曲几何的无矛盾性。这只不过证明了，如果欧几里得几何无矛盾，那么双曲几何也无矛盾。欧几里得几何的无矛盾性可以归结为算术的无矛盾性。因为，可以把解析几何用到欧几里得平面上，比如一个点对应于一对数。几何客体之间的关系变成了算术关系。这样一来，整套的问题又从一个领域转移到了另一个领域，也就是从几何领域转移到了算术领域。

以上只是以数学为例，说明演绎理论模型问题。要理解这种模型建立的根据，关键是理解体系"同构"的概念。"设想一个客体（如象几何的点、直线、平面）体系S_1和一些相应的关系R，R′，…（基本关系）。又设想在另外某一体系S_2中存在着这样一些关系，它们虽然具有全然不同的意义，却由相同的名称与前一领域中的关系R，R′，…相对应。如果有可能合乎规律地建立体系S_1的元素与体系S_2的元素之间的单值对应，使得S_1中有关系R或R′，…的那些元素对应于S_2中有与R，…名称相同的关系的那些元素，那么这两个事物域便是同构的。我们所建立的对应是S_1在S_2上的同构映象。可以说，同构的事物域具有相同的结构。属于S_1的每一个真句子（它们的意义只能从S_1领域中的关系R,R′,…的意义去把握）对应于同样的表达式所表述的关于S_2的句子，反之亦然；对S_1中的对象不可能断定任何不同时在S_2中成立的东西。"① 可以说，"同构"就是相同的结构。理

① 见魏耳：《论数学的哲学》，俄文版，第54页。

论模型的基础就是事物间的同构关系。

第二节　公理和公理方法

公理，就是经过人们长期反复实践的检验，其真实性非常明显，无需由其他命题加以证明而众所公认的判断，即不证自明的道理。例如：等量加等量其和必等，有生必有死，有压迫必有反抗等等，这都是公理。在人们的论证过程中，公理可以作为论证某一命题真实性的强有力的论据或理由。

公理方法，就是从初始概念和公理出发，然后从它们定义其他一切概念以及推演出其他一切定理的演绎方法。在一个理论中，人们为了避免“循环定义”和“循环论证”，总要选出少数不加定义的概念和不加证明的命题作为出发点。这些不加定义的概念称为初始概念，由初始概念下定义的概念称为被定义概念；不加证明的命题称为初始命题或公理，从公理推演出来的命题称为定理。由初始概念、公理、定义、推理规则、定理等所构成的演绎系统称为公理系统。因此，公理方法和公理系统是属于同一系列的概念，公理系统只不过是应用公理方法的结果。

在历史上，公理方法首先是在逻辑学和数学中形成的。两千多年前亚里士多德就认为：演绎证明的科学是关于某一个确定领域的全部真命题，这些命题可以区分为两类，一类是基本命题（即公理和公设），再一类是从基本命题引申出来的命题，也就是，运用逻辑推理从基本命题推演出来的定理。与此相应，在命题中使用到的全部概念也区分为两类，一类是基本概念，再一类是从基本概念派生出来的概念，也就是，运用逻辑定义由基本概念直接或间接加以规定的概念。亚里士多德提出了两个逻辑要求：第一，公理必须是明显的，因而是无需加以证明的；同样地，基本概念必须是直接可以理解的，因而是无需加以定义的。

第二，由公理证明定理时，必须遵守推理的逻辑规则；同样地，通过基本概念直接或间接地对派生概念下定义时，必须遵守下定义的逻辑规则。这样，亚里士多德奠定了公理方法的基础。但是他在逻辑中并没有系统地应用公理方法，他对逻辑只作了某种程度的公理化。欧几里得把亚里士多德初步总结出来的公理方法应用到几何学中，在数学史上第一次系统地应用公理方法写成了《几何原本》一书。

公理方法的发展大致可以分为三个历史阶段。

一 直观公理方法

从现代数学的观点看来，欧几里得的公理方法还没有完全摆脱几何的直观，它还存在着不少缺陷，只能是一种朴素的公理方法。即使到了近代，17世纪的数学家笛卡尔也是用的直观公理方法，在他的《哲学原理》一书中，根据运动的普遍性原理运用演绎法即公理方法研究世界的结构和物体的性质，第一次系统地在物理学中贯彻了公理方法，对后来理论物理学的发展影响很大。后来牛顿的《自然哲学的数学原理》，也是按直观公理方法写成的，等等。总之，这一历史时期中的公理方法主要体现在各种具体学科之中，带有直观和朴素的特点，或者说，一个公理系统只有一个特定的论域。

二 概括公理方法

19世纪，在数学方面最重要的成果之一是20年代末非欧几里得几何的发现，这个发现把公理方法推向一个崭新的阶段。由于空间的概念从个别（欧几里得空间）上升到特殊（各种空间），公理方法也就从直观性上升到概括性。第一，非欧几何使人们认识到：平行公设不能在其他九条公理和公设的基础上证明。它是独立的命题，所以可以采用一个与它相反对的公理并发展成为全

新的几何。这就是说，在一个公理系统中，我们可以把一个具有独立性的公理换为另外的公理而得到一个新的公理系统。这种方法是现代的一种重要公理方法。第二，非欧几何启发人们可以证明"在一个给定的公理系统中某些命题不可能证明"。这是现代的哥德尔不完全性定理的理论前导。第三，用模型方法建立了非欧几何相对于欧氏几何的无矛盾性。模型方法也是现代的一种重要公理方法。第四，非欧几何系统已经不象欧氏几何系统那样依赖于感性直观，人们的认识已从直观空间上升到抽象空间。用模型方法证明非欧几何的相对无矛盾性，破除了"一个公理系统只有一个论域"的传统观念，使人们看到，只要容许对一个公理系统作不同的解释，找不同的模型，那就实际上已把它看成是一个不与任何特定论域相结合的形式公理系统了。因此，非欧几何（以及射影几何等）在公理方法的发展史中带有过渡性质。

三　形式公理方法

20世纪头30年，公理方法发展得越来越体现为形式化特点。这时期贡献最大的是数学家希尔伯特。他所写《几何基础》一书不只是给出了欧氏几何的一个形式公理系统，而且具体地解决了公理方法的一些逻辑理论问题。比如，同一个形式公理系统可以有许多模型，这是因为公理概括了许多论域的共同点。没有数学内容的公理靠什么来把握这些论域的共同点呢？靠公理的逻辑结构。希尔伯特曾提出著名的计划：将各门数学形式化，构成形式系统，然后用一种初等方法证明各个形式系统的无矛盾性，从而导出全部数学的无矛盾性。他的证明论使用的基本方法是形式化的公理方法，这个方法的基本点是：第一，把数学理论中的定理排列成演绎的体系；第二，把数学中使用的逻辑推理规律排列成演绎的体系；第三，使用数学的符号（如＝、＋、×、0、a、b、c，等）和逻辑的符号（如¬、∨、∧、→、≡，等），把数学命

题变成公式，于是，全部数学命题就变成公式的集合，从而公理化的数学理论就变成演绎的形式系统。

一个形式公理系统应当包括以下几部分：（一）初始符号。初始符号可以说是一个形式系统的"字母"，经解释后其中一部分是初始概念。另一部分辅助性的初始符号是不单独给解释的。（二）定义，对初始符号中未被规定的符号，要通过初始符号进行规定，这时，那种未被规定的符号就称作被定义概念，而初始符号就称作定义概念。（三）形成规则。初始符号可以组成各种符号序列，而形成规则规定，哪些符号序列是合式的，哪些是不合式的。解释后有意义的符号序列叫作合式的，解释后没有意义的是不合式的。合适的符号序列经解释后是一句话，称为系统里的合式公式或命题。合式公式可简称为公式。在某些系统里，只有一部分合乎形成规则的符号序列是公式，另一部分合式的符号序列经解释后不是一句话而是一个词项。（四）公理。公式可以分为两种：一种是一个系统所要肯定的，一种不是。把某些所要肯定的公式选出，作为推导其他所要肯定的公式的出发点，这些作为出发点的公式称为公理。（五）变形规则。变形规则规定，如何从公理和已经推导出的一个或几个公式经过符号变换而推导出另一公式。经过解释，变形规则就是推理规则。应用变形规则进行推导可以得到一系列公式，这些公式经过解释就是系统的定理。

形式公理系统还必须有一个能行方法来判定以下各点：（一）一个符号是否为一个初始符号，（二）一个符号序列是否合式，（三）一个公式是否为一条公理，（四）一个有穷长的公式序列是否为一个证明，就是说，序列中的每一公式是否为一条公理或者是从先行的公式应用变形规则得到的公式（或定理）。这里所谓的能行方法，直观上不严格地说就是这样一种机械方法：每一步都是按照某种事先给出的规则所明确规定了的并且在有穷步骤

内能够完成。

第三节　形式公理系统的主要性质

研究形式公理系统性质的学问属于元逻辑范围。元逻辑是研究逻辑的逻辑，元逻辑理论把逻辑本身作为研究对象。从语源上说，“metalogic”（元逻辑）意思是指逻辑之后、逻辑之上的学问。逻辑中的有意义的结果很难跟元逻辑分开，因为逻辑学家感兴趣的所有定理都是关于逻辑公理系统的，因而是属于元逻辑的。逻辑演算内部的推导对于逻辑学家的内在兴趣并不大。因此，元逻辑被理解为不仅是处理关于逻辑演算的结果而且处理关于一般形式系统和形式语言的形式性质的研究，即关于形式公理系统性质的研究。

一　语形和语义

元逻辑关于形式公理系统性质的研究，分为语形的（即语法的、句法的）和语义的两个方面。前者研究系统的结构性质，研究可证明性和可定义性，系统的协调性、完全性、独立性、可判定性等，与证明论相关。后者研究系统中公式的意义，研究系统的解释，与模型论相关。

具体点说，一个形式公理系统的语形方面只涉及它的符号、公式、公式序列的形状，毫不涉及赋予它们的意义。就一个形式公理系统本身而言，它只有这一个方面，它本身的语言是某种特定的人工符号语言，是被讨论的对象，称为对象语言或形式语言。讨论形式公理系统时所使用的语言，称为元语言（包括语形或语法语言，及语义语言），它是自然语言再加上特定的符号，最常用的一种符号就是取形式语言中的符号或公式或公式序列为值的变项，称为语形变项（或语法变项）。研究一个形式公理系

统的语形性质的元理论是它的语形学。语形研究的结果也要写成定理，也要证明。这些定理叫“语形定理”，是一种“元定理”，与系统中的定理不同，其证明方法也不相同。

一个形式公理系统的语义方面涉及它的符号、公式、公式序列的意义。这些意义是通过解释建立的，而解释又可以有多种。在一般情况下，有一个解释是我们“预定的”。对形式系统的解释需要一套语义语言，通常也是补充了符号和公式的自然语言。语义语言包括语法语言，还包括表达各种语义关系的语词，如“普遍有效”、“真的”、“可满足”、“模型”等等。研究一个形式公理系统的语义性质的元理论是它的语义学。语义性质与语形性质的关系，例如永真公式类与可证公式类是否重合，也是语义研究的课题。语义研究的结果也要写成定理。

二　一致性、完全性和独立性

一个理想的形式公理系统应该具有一致性（即协调性、相容性和无矛盾性）、完全性（即完备性）和独立性特点。当然也要求自足性，即在证明定理时，除了逻辑外不再需要任何公理以外的依据。

一致性就是无矛盾性。一个理论如果有逻辑矛盾，那么这个理论就是不正确的。因此，无矛盾性或一致性是任何正确推理系统所必须具备的性质。关于形式公理系统的一致性有几种定义，这里介绍三种：

（一）古典一致性　**一个系统是古典一致的，当且仅当对任一公式A而言，A和¬A至少有一个在该系统中不可证，即至少有一个不是该系统的定理。**

（二）语义一致性　**一个系统是语义一致的，当且仅当该系统中的可证公式即定理都是永真公式。**

（三）语形一致性　**一个系统是语形一致的，当且仅当并非**

该系统中的任何合式公式都是该系统的可证公式即定理。

古典一致性的定义并不排除A和¬A在系统内都不可证的可能性。如果一个形式公理系统不满足古典一致性，那么这个系统同时可以证明A和¬A，就是说，这个系统是自相矛盾的，因此在公理中至少有一个为假命题。语义一致性是讲，既然该系统证明出的公式都是永真的，而公式A和¬A不能同真，因此该系统不能同时证明出A和¬A，就是说该系统没有逻辑矛盾。语形一致性是讲，在该系统中A和¬A可能都是合式公式，但决不都是可证公式即定理，这样也排除了逻辑矛盾。一致性的证明可以根据下述模式进行：引入公式的性质Φ，使得（1）所有公理都有性质Φ，（2）该系统的证明规则确保Φ（即，如果前提有性质Φ，则其结论也有性质Φ），（3）不存在A与¬A都有性质Φ的情况。

完全性比一致性要次要一些，某一系统具有完全性则更理想，没有也决非不可。关于形式公理系统的完全性，下面也介绍三种定义：

（一）古典完全性（简单完全性） 一个系统是古典完全的，当且仅当对系统内任一公式A而言，A和¬A至少有一个在该系统中可证，即至少有一个是该系统的定理。

（二）语义完全性（广义的、相对的完全性） 一个系统是语义完全的，当且仅当属于该系统的一切永真公式都能在这个系统里得到证明。

（三）语形完全性（狭义的、绝对的完全性） 一个系统是语形完全的，当且仅当如果把一个不可证的公式作为新公理引进，则该系统就会导致矛盾。

古典完全性要求系统只含有闭公式，因此有局限性。语义完全性要求一个系统把可用该系统内的概念表述的永真公式即重言式一网打尽。语形完全性要求在一个系统里不能把不可证公式当作定理，否则就会产生逻辑矛盾，这就是说该系统是够用的、完

备的。

独立性就是公理的不可推出性。根据给定的推理规则，如果从一类公式推不出某一特定公式，那么这一公式对于那一类公式就是独立的。对于一形式公理系统的公理，我们时常要求它们是独立的，这样建立的形式公理系统才是经济的。不过这一要求不是必要的，即使一形式公理系统的诸公理有不独立的，也不能算很大缺点。

对一公式独立性的证明一般是采用解释的方法。假定有一公式集合 { A_1，A_2，A_3，A_4 } 和两个推理规则 R_1，R_2，如果对该公式集合的公式赋予一种语义解释，使得 A_1，A_2 和 A_3 都有值 Φ（Φ是抽象的，可以是任何值，比如可以是真或假，也可以是 0，1，2之类的自然数），并且 R_1 和 R_2 是保Φ的，而 A_4 却不具有值Φ，那么，我们就说从 A_1、A_2 和 A_3 推不出 A_4，亦即 A_4 是独立的。这种方法所以成立，其理由是：如果 A_4 可以从 A_1、A_2 和 A_3 推出，那么由于 A_1、A_2、A_3 有值Φ，并且 R_1、R_2 是保Φ的，所以 A_4 必有值Φ；但 A_4 却没有值Φ，故 A_4 不能从 A_1、A_2 和 A_3 推出。据此，一公式独立的概念也可定义为：公式A对于公式B是独立的，当且仅当有一个解释，使得B有值Φ而A没有值Φ。

第四节　关于公理系统的两个元定理

关于形式公理系统的研究，有两个重要的元定理，这就是哥德尔不完全性定理和丘奇不可判定性定理。

美国数理逻辑学家哥德尔（1906—1978）所证明的不完全性定理，在数理逻辑发展史上具有划时代的意义，它加深了人们对公理方法的认识，甚至打破了人们利用机器证明一切数学定理的幻想。不完全性定理是说：如果形式算术系统是简单无矛盾的，那么它就是简单不完全的；这就是说，在系统中存在一个具有形

式（$\forall x$）A（x）的公式（或称命题）B，使得B和┐B都不是系统的定理。这样的B称之为不可判定的命题。对不完全性定理如果作一直观证明，那就是：设形式算术系统是简单完全的，即命题B或者它的否定┐B是可证的。如果B是可证的，则它所表达的元数学命题“B在系统中不是可证的”就是真的，这就是说B不是可证的，与题设矛盾。如果┐B是可证的，则“并非‘B在系统中不是可证的’”这一命题就是真的，即B是可证的，这与题设“┐B是可证的”相矛盾。因此可得：系统不是简单无矛盾的。所以，如果形式算术系统是简单无矛盾的，那么它就是简单不完全的。B就是一个不可判定的命题，即B不可证，┐B也不可证。由于B确实不是可证的，因而“B在系统中不是可证的”这一元数学命题就是真的，在系统中表达它的命题B也就是真的。因此，在系统中存在真的但不可证的命题。关于哥德尔不完全性定理的严格证明原本比较复杂，我们在下面只是择要介绍。

一　哥德尔数

任何一个初始符号、公式（符号序列）和证明（公式的有穷序列）都可以配以唯一的一个数，这样的数称之为符号、公式和证明的哥德尔数。我们把如下的符号分别配以1—14的自然数：

↔，	→，	∧，	∨，	┐，	∀，	∃，	=，	+，	·，	’，	0，	（，	）。
|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

对每一个不同的自然数变项配以大于14的不同的素数（即质数，只能被1和这个数本身整除的整数）。例如：

自然数变项	a，	b，	c…
	|	|	|
哥德尔数	17，	19，	23…

因此我们在初始符号和自然数的一个子集合之间建立了一一对应的关系。我们规定，自然数的有穷序列k_1，…k_n，对应于单个的自然数：

$$2^{k_1}\cdot 3^{k_2}\cdot 5^{k_3}\cdot \cdots \cdot P_n^{k_n},$$

这里Pi是第i个素数（按数量大小的顺序排列）。

一个公式是符号的有穷序列，对每个公式我们配以一个数，这个数对应于配给其构成公式的符号的自然数序列。例如，在公式（ƎC）（c'＋a＝b）中，构成这个公式的12个初始符号的哥德尔数依次为：13，7，23，14，13，23，11，9，17，8，19,14。而这完整公式的哥德尔数为：$2^{13}\cdot 3^{7}\cdot 5^{23}\cdot 7^{14}\cdot 11^{13}\cdot 13^{23}\cdot 17^{11}\cdot 19^{9}\cdot 23^{17}\cdot 29^{8}\cdot 31^{19}\cdot 37^{14}$。

一个证明是公式的有穷序列，对每一证明我们配以一个数，它对应于配给其构成证明的公式序列的自然数序列。例如下面两个公式序列：

（Ǝa）（a＝b'），

（Ǝa）（a＝0），

构成一个证明，设已求出第一个公式的哥德尔数为m，第二个公式的哥德尔数为n，则这个证明的哥德尔数为：$2^{n}\cdot 3^{n}$。

这样，在公式和自然数的一个子集合之间、证明和自然数的一个子集合之间建立了一一对应的关系。于是我们就为形式算术系统建立了一种完全“算术化”的方法，使系统中的初始符号、公式和证明同自然数的子集合之间建立起一一对应关系（显然，并非每一个自然数都是哥德尔数）。如果给出一个符号序列，那么与这个符号序列唯一对应的哥德尔数便可计算出来。反之，给出一个自然数，我们也能决定它是否是一个哥德尔数，如果它是哥德尔数，那么它所对应的符号序列便可得出来。

二 不完全性定理证明

这里需要引用ω无矛盾性概念。一个形式公理系统是ω无矛盾的，如果有一个公式F使得：F（z_0），F（z_1），F（z_2），…；¬（∀Δ）F（Δ）并非全都可证。否则，F（z_0），F(z_1)，…；¬（∀Δ）F（Δ）全都可证，系统就是ω矛盾的。显然，ω无矛盾性蕴涵简单无矛盾性，因为只要令F是一个不包含自由变项的公式，ω无矛盾性的定义就变为简单无矛盾性的定义（即如果有一F，并非F和¬F都可证）。但逆之不真，就是说，一个系统可以是简单无矛盾的，但可能是ω矛盾的，简单无矛盾性不能排除F（z_0），F（z_1），…；¬（∀Δ）F（Δ）都可证这样一种矛盾，因为我们的系统没有一条规则使得由F（z_0），F（z_1），…全可证得到（∀Δ）F（Δ）也可证，事实上（∀Δ）F（Δ）要比F（z_0），F（z_1），…强。引进ω无矛盾性正是为了排除上述的矛盾。

哥德尔不完全性定理的严格陈述是：如果形式算术系统是简单无矛盾的，则U（z_m）不是可证的；如果系统是ω无矛盾的，则¬U（z_m）不是可证的。因此，如果系统是ω无矛盾的，则它就是不完全的，U（z_m）就是一个不可判定的命题。

证明：

（1）如果形式算术系统是简单无矛盾的，则U（z_m）不是可证的（U（z_m）表示（$\forall_b$）¬B（b，S（z_m，z_m）），其直观算术命题为：对所有自然数x而言，Pf（x，Sb（m，m））是假的，可记为（∀x）¬Pf（x，Sb（m，m）），即所有自然数x都不是哥德尔数为Sb（m，m）的公式的证明的哥德尔数）。

假设U（z_m）可证，它就有一个证明，其哥德尔数为k，则有Pf（k，Sb（m，m））。因为S（Δ_1，Δ_2）表示Sb（x，y），B（Δ_1，Δ_2）表示Pf（y，a），所以可得B（z_k，S（z_m，z_m））

是可证的。又由假设U（z_m）即（∀b）¬B（b, S（z_m, z_m）可证，根据系统中的全称消去规则可得：¬B（z_k, S（z_m, z_m））是可证的。这样，在系统中就产生矛盾。据归谬法，假设是不能成立的。

（2）如果系统是ω无矛盾的（从而也是简单无矛盾的），则¬U（z_m）不是可证的。

据（1），U（z_m）不可证，即没有一个数是U（z_m）的证明的哥德尔数，而U（z_m）的哥德尔数为Sb(m, m)，因此Pf(0, Sb（m, m）)，Pf（1, Sb（m, m)），Pf (2, S b(m, m))，…皆假，表达在系统中就是：¬B（z_0, S（z_m, z_m）），¬B（z_1, S（m, m）），¬B（z_2, S（m, m）），…皆可证。

根据系统ω无矛盾性，可得：¬（∀b）¬B(b, S(m, m)）即¬U（z_m）不是可证的。

定理证毕。

上述定理也称哥德尔第一不完全性定理，它还有一条系定理或称哥德尔第二不完全性定理，即：如果形式算术系统是简单无矛盾的，则不能用系统内的形式化方法来证明它。此定理的具体证明从略。

美国著名数理逻辑学家丘奇（A·Church, 1903—）曾提出不可判定性定理，即：如果形式算术系统是简单无矛盾的，则没有一个判定程序来确定该系统的任一公式是不是可证的，也就是说，形式算术系统的判定问题是不可解的。另外，可作为丘奇不可判定性定理的系定理的，还有谓词演算的不可判定性定理，即：没有一个判定程序来确定谓词演算中的任一公式是否可证，也就是说，谓词演算的判定问题是不可解的。对于这些定理的具体证明，我们在此也从略。

第五节　归纳方法与演绎方法

归纳和演绎是科学研究中两种方向相反而又互相配合的逻辑思维方法。在个别中发现一般，其推理形式和思维方法属于归纳；在一般中发现个别，其推理形式和思维方法属于演绎。

归纳和演绎的区别有如下三个主要方面：

一、推理形式方面　在演绎推理形式中，前提与结论之间有必然联系，就是说，当我们用任何具体内容代入前提与结论时，如果前提是真的，结论也是真的。这种必然的联系，人们也称作蕴涵关系。相反，在归纳推理形式中，前提与结论之间却没有必然性的联系，而只有一种或然性的联系，就是说，当我们用某些具体内容代入前提与结论时，可能前提是真而结论也是真，也可能前提是真而结论却是假。归纳推理有或然性而演绎推理有必然性，这是二者在推理形式方面的区别。

二、认识发展过程方面　演绎推理一般说来是由一般（或普遍）到个别，就是说，前提是普遍性的命题而结论是个别性的命题。归纳推理一般说来是由个别到一般（或普遍），就是说，前提是个别性的命题而结论是普遍性的命题。当然，演绎推理有时也可以是由一般到一般或个别到个别；归纳推理有时也可以由个别到个别或一般到一般。但是，这只是次要的情况。

三、前提与结论所断定的范围方面　演绎推理的结论所断定的范围没有超出前提所断定的范围；相反，归纳推理的结论所断定的范围却超出了前提所断定的范围。

归纳和演绎的联系有如下三个主要方面：

一、归纳是演绎的基础。演绎是从归纳结束的地方开始的，演绎的一般知识来源于经验归纳的结果。没有大量的机械运动的经验事实，不可能建立能量守恒定律；没有大量的生物杂交的试

验事实，不可能创立遗传基因学说。数学是一门演绎成分起重要作用的科学，表面上看似乎不需要经验和归纳，其实不然，数学必须借助于归纳的思维方法才能得到建立和发展。例如，关于素数有这样一条定理：在任一素数和它的二倍之间，至少存在另一个素数。如在2与4之间有素数3，在3与6之间有素数5，在5与10之间有素数7，等等。显然，素数的这条定理是通过归纳推理得到的。数学的定义、原则、公理等抽象概念，都是归纳人类实践经验的产物，都可以在现实世界中找到它们的原型。可见，归纳为演绎准备前提，演绎中包含有归纳，一刻也离不开归纳。

二、演绎是归纳的前导。归纳虽然是演绎的基础，但归纳本身也离不开演绎的指导，对实际材料进行归纳的指导思想往往是演绎的成果。假说是贯穿在整个归纳过程中的重要方法，而假说就是明显地应用了演绎推理的。要验证假说，就必须从假说推出一些结论。这里所说的“推出”，就是指演绎推理的推出。还有，归纳推理要提高它的可靠性，就必须和已有的科学知识相结合，就必须应用已有的科学知识来分析所研究的现象。没有普遍性的知识就不能分析个别性的现象。没有演绎证明了的理论归纳就缺乏明确的目的与指导，因而归纳一刻也离不开演绎。

三、归纳和演绎互相渗透。归纳和演绎是互为条件、互相渗透的，并在一定条件下互相转化。归纳出来的结论成为演绎的前提，归纳转化为演绎；以一般原理为指导对大量具体材料归纳出一般结论，演绎又转化为归纳。归纳和演绎是相互补充，交替进行。归纳后随之进行演绎，使归纳出的认识成果得到扩大和加深；演绎后随之进行归纳，用对实际材料的归纳来验证和丰富演绎出的结论。人们的认识，在这种交互作用的过程中，从个别到一般，又从一般到个别，循环往复，步步深入。

第六节 常用的几种归纳方法

传统形式逻辑中包括对归纳逻辑的研究，其中许多方面又时常和科学方法论的一些内容相重合。从历史上考察，系统的归纳逻辑是伴随近代实证科学的产生而产生的，它以研究科学发现和科学论证的方法为本学科的中心任务。从理论上说，科学认识活动总是从认识个别的、离散的事实开始，进而认识事物普遍的线性的规律，这当中一定包含着某种手段、途径、程序和模式，即一定包含着某种科学逻辑的方法，因此归纳逻辑和科学方法论的研究范围在很大程度上带有一致性。

归纳推理一般是由个别的事物或现象推出该类事物或现象的普遍性规律的推理。归纳推理的前提是一些关于个别事物或现象的判断，而结论却是关于该类事物或现象的普遍性判断，因此。归纳推理的结论超出了前提所断定的范围。在归纳推理的形式中，前提与结论之间的联系不是必然的，而是或然的。这是归纳推理的一个十分重要的特征。简单枚举法、类比法、统计推理和求因果五法等都属于归纳推理的范围。

一、简单枚举法 我们观察到某类中许多事物都有某属性，而又没有观察到相反的事例，我们就作出结论：某类事物都有某属性。这就是简单枚举法。例如，人们在海边年复一年地看到，每当月亮圆的时候海上潮水最高，于是逐渐得出“凡月亮圆的时候潮水最高”的结论。这就是用了简单枚举法。这种方法的可靠性受到枚举数量的制约。虽然它是一种可靠性不大的归纳推理，但是人们在日常生活中却经常应用它。跟简单枚举法相关联的还有两种归纳方法：其一是完全归纳法，即由某类中每一个事物都具有某属性，推出该类全部事物都具有该属性。由于完全归纳法

是从全类推出一般，其前提与结论之间的联系是必然性的，结论所断定的又没有超出前提所断定的范围，所以现代逻辑认为它是一种演绎推理。其二是科学归纳法，即根据对某类中部分对象及其属性之间的必然性联系的认识，推出有关该类对象的一般性的结论。这种结论虽然比简单枚举法要可靠得多，然而从其根本性质上看，科学归纳法是从个别推出一般，其前提与结论之间的联系仍是或然性的。

二、类比法 我们观察到两个或两类事物的许多属性上都相同，便推出它们在其他属性上也相同，这就是类比法。类比法的可靠程度决定于两个或两类事物的相同属性与推出的那个属性之间的相关程度，如果相关程度越高，那么类比法的可靠性越大。

三、统计推理 由样本具有某属性推出总体具有某属性的推理，就是统计推理。比如要研究中学生经常参加体育锻炼是否有利于学习的问题，可以找出平均成绩为90、100分的学生1000人，算出他们参加体育锻炼的学期平均次数，比如为110次；另外找出平均成绩为0、90分的学生1000人（与前一组人在学校、性别、年龄等方面相同或近似），算出他们参加体育锻炼的学期平均次数，比如为38次。由这些统计数字，我们就可以推出结论：中学生经常参加体育锻炼有利于学习。

四、求因果五法 也叫“穆勒五法”，即契合法、差异法、契合差异并用法、共变法和剩余法。契合法是：如果在所研究的现象出现的两个或两个以上的场合中，只有一个情况是共同的，那么这个共同的情况就与所研究的现象之间有因果联系。差异法是：如果所研究的现象出现的场合与它不出现的场合之间，只有一点不同，即在一个场合中有某个情况出现，而在另一个场合中

这个情况不出现，那么这个情况与所研究的现象之间就有因果联系。契合差异并用法是：如果在出现所研究的现象的几个场合中，都存在着一个共同的情况，而在所研究的现象不出现的几个场合中，都没有这个情况，那么这个情况与所研究的现象之间就有因果联系。共变法是：如果每当某一现象发生一定程度的变化时，另一现象也随之发生一定程度的变化，那么这两个现象之间有因果联系。剩余法是：如果已知某一复合现象是另一复合现象的原因，同时又知前一现象中的某一部分是后一现象中的某一部分的原因，那么前一现象的其余部分与后一现象的其余部分有因果联系。

五、其它归纳方法 其它归纳方法包括观察、实验、比较、分类、分析、综合、统计中的选择、求平均数以及假说等。如果说归纳推理是研究从特称推出全称的思维形式结构问题，那么其他归纳方法则是研究从特殊进入一般的认识现实的方法问题。有的教科书把形式逻辑定义为“研究思维的逻辑形式及其规律，以及认识现实的简单逻辑方法”，大致说来，归纳推理属于前半情况，其他归纳方法属于后半情况。

（一）观察与实验 在事物或现象的自然状态下，通过感官去认识事物或现象，这就是观察。在控制事物或现象的条件的情形下，通过感官去认识事物或现象，这就是实验。

（二）比较与分类 比较就是通过寻找两个或两类事物的共同点和差异点来更好地认识事物性质的过程。在比较的基础上，把具有不同属性的事物各归入不同的类，这便是分类。观察与实验、比较与分类，都是从特殊到一般、从感性到理性的认识方法。

（三）分析与综合 分析是在思想中把对象分解为各个部分或因素，分别加以考察的逻辑方法。综合是在思想中把对象的各

个部分或因素结合成为一个统一体加以考察的逻辑方法。分析以综合为目的，综合以分析为前提。

（四）统计中的选样　从事物总体中选出典型样本的方法，统计学中叫做选样。选样方法的目的，是想通过对样本的研究，从样本具有某种属性而得出总体也具有这种属性。在社会科学中，选样方法即调查研究、“解剖麻雀”的方法。

（五）统计中的平均数　包括算术平均数、加权平均数和中数等。算术平均数就是把许多数据加在一起，然后用这些数据的数目去除而得到的数。加权平均数比较复杂，先要理解什么是“权数”。在统计中计算平均数等指标时，对各个变量值具有权衡轻重作用的数值称作权数。例如，计算工人的平均工龄时，各种工龄的工人人数影响着平均工龄的大小，各种工龄的工人人数就是权数。按不同权数计算的各个数量的平均数，就是加权平均数。设x_1；x_2，…，x_n为n个数，f_1，f_2，…，f_n顺序为x_1，x_2，…，x_n的权数，则称

$$\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_nf_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}=\frac{\Sigma xf}{\Sigma f}$$

为x_1，x_2，…，x_n的加权平均数。关于中数，就是按大小排列起来的一串数的中间的一个数，它是一个比较稳定的平均数。

（六）假说　人们根据已有的知识对于所研究的事物或现象作出初步的解释，这就是假说。假说本身的发展大致分为三步：首先是假说的提出，其次是由假说推出一些结论，最后是验证这些结论。假说贯穿在整个归纳活动中，是科学研究过程中的重要方法。

归纳推理和其他的归纳方法是有机地联系着的。要发现客观事物或现象的规律，就必须首先取得有关客观事物或现象的感性材料。这就要应用观察与实验。通过观察实验所得到的感性材料，还必须进一步加以整理和加工。这就要应用比较、分类、分

析与综合这些方法。我们还要应用简单枚举法和类比法这些初步的方法进行归纳推理。

第七节 科学方法论

“方法”一词来源于希腊文μετα和οδος，其意是指“沿着正确的道路运动”。按词意上理解，“科学方法”就是指科学研究的正确道路，即正确的理论、原则、方法和手段等等。“科学方法论”则是以科学方法为研究对象，建立起关于科学方法的元理论。

我们知道，任何科学领域的理论都包含有两个层次：对象理论和元理论。某科学的对象理论不是以该科学的理论本身为研究对象，而是以本科学的理论所探讨的直接现实为研究对象，比如平常所说的“物理学”，就是以自然物质的基本结构和运动的一般规律这样的直接现实为研究对象，而平常所说的“历史学”则是以人类社会的发展过程这样的直接现实为研究对象，因此，它们的理论都是对象理论。所有对象理论中都有各种各样的具体方法，比如物理学中有观察试验、模拟计算、逻辑推证等，历史学中有考古鉴定、训诂考证、索隐统计等，这些具体方法仍属于对象理论范畴，它们只能称作“物理学方法”、“历史学方法”等等。但是，某科学的元理论则不同，它是以该科学的理论本身为研究对象，是“关于理论本身的理论问题”，比如“物理学说史”、“历史学说史”、“物理学方法论”、“历史学方法论”等等，它们统称为“物理学学”、“历史学学”或“元物理学”、“元历史学”，它们都属于元理论。

对象理论和元理论具有相对意义。当人们以“物理学方法论”、“化学方法论”、“生物学方法论”等自然科学的方法论为研究对象时，这些方法论就又成为对象理论，而由之生成的

"自然科学方法论"便是元理论。同样，当人们以"历史学方法论"、"经济学方法论"、"文学方法论"等社会科学的方法论为研究对象时，这些方法论也成为对象理论，而由之生成的"社会科学方法论"则是元理论。进一步，当人们以"自然科学方法论"和"社会科学方法论"等为研究对象时，这些方法论又成为对象理论，而由之生成的"一般科学方法论"就是元理论。

居于以上分析，我们试将科学方法论分类如下：

一 具体学科方法论

它只涉及各个门类学科本身的具体研究方法问题。它不仅包括数、理、化、生、地、机械、冶金、医学等等，而且包括文、史、哲、经、教、心理、艺术、宗教等等具体学科的具体研究方法问题。这里需要特别指出的是：哲学方法和数学方法虽然在人们整个的科学研究中都具有普遍的意义，但是它们跟"哲学方法论"和"数学方法论"又有所不同。比如"哲学方法"主要是指人们以哲学原理作为世界观的最高指导原则，进一步从事具体科学研究的方法；而"哲学方法论"则主要是讲哲学学科本身的研究和构造方法问题，它只属于"哲学学"范畴。

二 基础科学方法论

我们这里用的是"科学"一词，而没用上面的"学科"一词，目的是为了表明这里的方法论要比上面的方法论带有更宽泛的意义。基础科学方法论包括：自然科学方法论、社会科学方法论、思维科学方法论和技术科学方法论等等。在这当中，人们以往的研究对自然科学方法论比较深入，因为它的内容实际上包含在自然辩证法、科学哲学和科学逻辑当中；而人们对其他基础科学方法论的研究，目前看来还很不够。自然科学的一般方法包括：观察方法、实验方法、模拟方法、理想化方法、逻辑方法

（如比较法、分类法、类比法、归纳法、演绎法、分析法、综合法等）、数学方法、控制方法、信息方法和系统方法等等。但这决不是指这些方法仅仅适用于自然科学研究，而是说它们和各门自然科学特殊方法相比是自然科学的一般方法。这些一般方法是否能运用于社会科学中去，则按照各自的不同特性有不同的情况。在自然科学研究的一般方法中，观察方法和实验方法主要适用于自然科学研究的方法。社会科学主要运用调查研究方法、统计方法等。社会科学中也运用观察法，但它们是社会科学中产生的方法、具有自身的质的特殊性，与自然科学中的观察、实验不是等同的。逻辑方法和数学方法是概括程度很高、运用范围很广的方法，可以说它对于所有基础科学都带有普适性的特点，因此它并不是自然科学研究的特有方法。控制方法、信息方法和系统方法起初都是研究工程技术的方法，后来逐步运用到自然科学、社会科学和思维科学当中，使人们对这些方法的概括程度和适用范围有了进一步认识。

三　一般科学方法论

这里主要研究的是最高层次的、带有世界观指导意义的根本方法，即哲学方法；同时还要研究在基础科学方法论中总结和升华出来的最一般的普适方法。哲学是关于世界观的学问，是理论化、系统化的世界观。世界观也就是方法论。当着人们用它去说明世界的时候，就是世界观，当着人们用它去指导认识和改造世界的活动的时候，就成为方法论。马克思主义哲学的基本观点诸如物质观、意识观、运动观、时空观、矛盾观、质量观、否定观等等都是我们在从事各门科学理论研究的时候必须遵循的基本观点，也是我们判别各门科学观点的一种理论准则。当然，马克思主义哲学作为世界观所起的方法论作用，绝对不意味着可以用一般的哲学议论去代替各门科学具体的科学研究。思想上的启发、

科学研究的最一般方向、判别理论的最一般准则都是进行科学创造的因素和条件，既不等于科学创造本身，也不等于科学创造的结果。基本哲学观点之对于科学研究的方法论作用，犹如指南针之对于航海的作用。

各种具体的科学方法论都包含4个基本要素：研究对象、物质手段、思维的形式和方法、理论工具。研究对象就是一定研究过程所要认识的客体，它的特点规定和制约了研究方法的性质和特点，而研究方法又必须适应于客体对象。物质手段就是人们在科学研究过程中使用的各种人造工具和仪器等，它们是物质的存在形态，具有机械、物理、化学等各种性能和作用。思维的形式和方法就是思维过程中所使用的概念、判断、推理这些基本的思维形式以及归纳和演绎、分析和综合、抽象和具体、类比和假设这些基本的逻辑方法。理论工具就是指人们在科学研究过程中所使用的即成理论知识的总和，就是说，人们即成的理论知识制约着人们的认识和研究的水平和方式。以上4个基本要素既决定、制约、影响着某一特定研究过程的科学方法，也决定、制约、影响着科学方法的历史发展，并且使各种科学方法形成有机的系统。

第八节　现代科学方法论的主要流派

20世纪西方科学方法论的研究有了较快的发展，出现了不同的学派。现简介如下：

一　正统的逻辑主义观点

（一）现代归纳主义

逻辑实证主义属于现代归纳主义。以罗素（1872—1970）和维特根斯坦（1889—1951）为代表的逻辑原子论思想是逻辑实证主义思想的先导。逻辑实证主义的真正兴起则应从20年代中期维

也纳学派形成算起，后来很快成为国际性思潮。经验主义和逻辑主义是他们的共同出发点，认为只有经验才能给我们提供关于世界的可靠知识，只有用数学与逻辑去寻求知识才是精确的，他们广泛运用了符号逻辑作为推理和表述的工具，因而他们的观点又称为逻辑经验主义。

这一派理论的主要特点是：①逻辑主义。他们首先明确提出“科学逻辑”的概念，主张科学逻辑是科学的元理论，是罗素等人的符号逻辑在科学理论中的应用。按照卡尔纳普的极端说法，科学逻辑就是“科学语言的逻辑句法”。②经验主义。可证实性原则是逻辑实证主义的基本原则，它是说：当且仅当一个陈述或者是分析陈述（例如“偶数可以被2整除”）或者是经验可以证实时，才是有意义的。这个划界标准对他们来说既是意义标准，又是真理标准。这样，经验自然科学的命题是有意义的、可证实的；数学和逻辑真理是永真的重言式；而其他不可证实的、无意义的、无所谓真假的陈述应当作为“形而上学”或伪科学而被清除。经验主义还表现在关于经验科学理论结构的“两层语言”模型上，即下层语言是关于观察事实的陈述（单称陈述），上层语言是理论陈述（全称陈述），符合规则（或操作定义）将两者对应、联系起来，将理论陈述还原到经验基础。③归纳确证的概率论观点。归纳知识的不确实性和休谟归纳难题都激励着他们积极研究解决办法，于是出现将归纳法与随机过程的数学理论联系起来，即从统计数学理论中寻找逻辑根据。

但是，逻辑实证主义的基本信条碰到了越来越严重的种种困难：证实原则难于真正贯彻，完全的经验证实不可能，而概率确证理论却又面临全称（无限）陈述的确证概率为零的责难；观察渗透着理论，二层结构模型的基础受到动摇；逻辑主义的高度形式化的分析纲领对于大部分经验科学难以贯彻到底，而且单纯静态结构分析不能反映科学的动态发展，不符合科学史的实际。

（二）波普尔的证伪主义

当代著名的英国科学哲学家卡尔·波普尔(1902——)跟维也纳学派交往甚密，但从来不是逻辑实证主义者。与实证主义相对立，波普尔哲学的一个鲜明特点正在于宣扬知识可误论和证伪主义。他认为：从批判眼光看，科学理论都可以证伪，科学知识总是有错，再好的科学理论也不是永恒真理。证伪、批判被看作科学方法的本质，成为波普尔哲学的特殊标记，人称“证伪主义”或“批判理性主义”。

按照波普尔的意见，凡是可以证伪的陈述才是科学的；凡是不可证伪的陈述就是非科学的（其中包括不是经验科学的和伪科学的）。“天或者下雨或者不下雨”是永真的陈述，不能证伪，不属于经验科学。占星术的抽象预言不能证伪（当然也不能证实），是伪科学的。天文学家说的“太阳系的别的行星上可能存在高等动物”是可证伪的（虽然尚未证伪），属于经验科学。他提出可证伪性作为划界标准的主要根据在于全称陈述与单称陈述之间的逻辑关系的不对称性。不论多大数目的有限次的经验观察都不足以证实全称陈述；反过来一个实例（单称陈述）就足以推翻（证伪）全称陈述。证实总是跟归纳主义、经验主义相联系；证伪总是跟演绎主义、理性主义相联系。

波普尔认为，一个较好的理论必须满足以下三方面的要求：（1）“可证伪程度”较高；（2）能经受更“严峻的考验；(3)“逼真性程度”越来越高。他还提出了科学知识增长的模式与演绎检验法。他也否认古典意义的发现逻辑，他所谓的“科学发现的逻辑”等同于科学方法论，其任务是要建立那些指导科学家进行科学活动的方法论规则或规范。因此被人称为“规范方法论”。演绎检验法与归纳主义的方法相对立。归纳法是一条从观察到理论的道路，而波普尔的方法则是一条从理论（假设、期望）到观察的道路。确认假设（理论）先于观察，这是波普尔采用演绎检

验法代替归纳法的一个基本出发点。波普尔把他的方法称作“试错法”，即从问题（P_1）开始，经过推测、猜想、假设、尝试等试探性理论（TT），又对这种理论进行反驳、批判、证伪、排错等（EE）过程，接着产生新的问题（P_2）。写成公式为：

$$P_1 \longrightarrow TT \longrightarrow EE \longrightarrow P_2$$

这就是说，面对问题提出试探性解决办法（理论），对解决方法、理论）进行反驳，排除错误，又产生新问题。试错法是一种用观察陈述否证理论的方法，对它的证明是用可推演性的逻辑关系（从单称前提的真推出全称陈述为假），这种证伪推演的方法在历史上一直可追溯到古希腊时期。

二 非正统的逻辑主义观点

（一）库恩的科学革命论模式

托马斯·S·库恩（1922——）是美国科学哲学家。他对哥白尼革命和20世纪物理学史作了细致的研究，创立了关于科学发展的“范式论”或“科学革命论”。按照归纳主义的科学发展观，科学知识是以经验为根据的归纳上升和直线式积累的过程。波普尔的规范方法论所强调的却不是知识的数量积累，而是科学理论（假说）的革命交替。库恩认为，只看到积累或者只看到革命交替都是片面的，都不合乎科学史的事实。库恩不赞成波普尔那种“理性的重建”，而是主张“历史的再现”的科学发展模式。因而他的学派被称为历史主义学派。

库恩和波普尔都致力于探索科学的发展，但却建立了不同的模式。波普尔强调爱因斯坦式的批判精神，主张科学通过对现有理论的不断“证伪”、反驳而向前发展，因此可称之为“不断革命”论。库恩的科学发展模式则可称之为“阶段革命”论：原始科学日趋成熟，终究要建立一定“范式”作为专业基础，经过范式支配下的“常规科学”的发展，使范式日益完善，与此同时，

"反常"现象日益增多又终于使旧范式穷于应付而陷入"危机"，于是爆发"科学革命"，并由新范式取而代之。因此，科学的增长总要通过常规科学的积累阶段而进入科学革命，库恩认为，这才是全面的看法。库恩的发展模式大致是：

前科学时期——常规科学——危机——科学革命……

总括库恩全部科学观的基本概念是"范式"（Paradigm）。范式是科学家集团即科学共同体的无所不包的研究手段，即世界观、信念、价值标准、理论、方法、仪器等等。常规科学研究总是为了深入分析范式所已经提供的现象和理论。库恩结合科学史而使"范式"和"常规科学"的概念较有实际感。牛顿的《自然哲学的数学原理》和《光学》、富兰克林的《电学》、拉瓦锡的《化学》以及莱伊尔的《地质学》，这样一些经典著作都确立了"范式"，都在一定时期里为以后几代的工作者暗暗规定了某一科学领域的研究方向、问题和方法。它们具有两个根本特点：一是其成就足以空前地吸引一大批坚定拥护者，使他们摆脱各种形式的竞争活动；二是这种成就又足以毫无限制地为他们留下各种有待解决的问题。库恩认为，凡是具备这两个特点的科学成就都称得上"范式"。

库恩指出，放弃一个范式永远意味着同时接受另一个范式。科学革命就是科学家（集团）由效忠于旧范式转变为效忠于新范式。旧范式与新范式的候补者在逻辑上是不相容的，它们的拥护者分别属于两个不同的阵营，相应有截然不同的准则和价值标准。前后相继的范式之间的差别是实质性的和不可调和的。比如，爱因斯坦相对论的范式与牛顿经典力学的范式就是不可比的。

（二）拉卡托斯的研究纲领方法论

伊姆雷·拉卡托斯（1922——1974）是出生于匈牙利的英籍科学哲学家。波普尔主张科学发展过程是可以理性地重建的，但

他忽视科学史的实际；库恩注意科学史的再现，但他忽视理性的重建。拉卡托斯则希望把两者的优点即“理性的重建”和“历史的再现”结合起来。他对波普尔的理性重建方式进行了改进。主要是：仿照库恩的范式和常规科学，用理论“研究纲领”代替波普尔的单一理论。研究纲领包括：反面启发法（反面助发现法），即指示不该做的事，不得触动硬核，可修改的只是保护带；正面启发法（正面助发现法），即指示应该做的事，增加辅助假说和改进实验技术，解释和预见新事实，调整保护带，它实际是处理预期反常的一系列理论战略或程序性提示。拉卡托斯的科学研究纲领就是他所提供的作为评价科学知识增长的单位。它是一个有结构层次的复杂体系，是硬核、保护带和研究方法三者的统一物。它具有相对稳定的硬核，又有柔韧多变的保护带，可以通过积极的研究方法或消极的研究方法加以适当的调整或改变，以保护硬核不受侵害。

（三）费耶阿本德的多元主义方法论

保尔·费耶阿本德（1924——）是维也纳出生的当代美国科学哲学家。他反对传统逻辑主义的方法论，提倡“各行其是”的多元主义（或无政府主义）的方法论而著名。他的主张属于历史主义学派。他认为科学不应该独占“唯一正确的方法和唯一可接受的成果”。科学不是绝对可靠的，它有许多优点但也有许多缺点。科学与非科学的分离是人为的。科学与非科学的联合才对人们有益。应当反对盲目崇尚科学的“科学沙文主义”。

（四）劳登的科学进步模式

拉里·劳登（1941——）是当代美国科学哲学家。他的进步模式把科学描述为解决问题的活动。问题被认为是科学思想的关键。科学问题可分为经验问题和概念问题。经验问题涉及所研究领域对象的结构和关系；概念问题涉及科学讨论、争论中的疑难或是科学理论结构与该领域的方法论前提的不协调。他认为科学

进步有三个基本途径：第一个是通过增加解决经验问题的数目，第二个是消除所谓“反常”，第三个是使看来冲突的不同理论重新协调起来。

第八章　现代逻辑的实际应用

本章主要介绍数学领域以外的应用。把逻辑在数学领域的应用放到下一章去。

第一节　命题逻辑的应用

我们先举一个生动的实例。在一个集体宿舍里，检查清洁卫生的人员在房间的一个角落里发现了一只已经发霉的完整的馒头。这种浪费粮食的现象引起了检查人员的注意，他们希望弄清究竟是谁丢掉这个馒头？事情当然只能是住在这个宿舍中的A、B、C、D四人中的一个人干的。但当检查人员询问他们时，A却说“这是B干的”，B则说“这事是D干的”，C说“我没有干这件事”，D也说“我没有干这件事”。根据事后调查，四人中只有一人说的是真话。试问，这事到底是谁干的呢？

对这个问题我们可以通过命题逻辑的求简化的合取范式的方法，精确地推出可靠的结论。所谓简化的合取范式，一般是指合取项最少的合取范式。它是在求合取范式的基础上，按一定的逻辑规律再删去若干简单合取式而得到的。我们先把前提条件转化为命题逻辑的语言。

设p表示命题“A干了这件事”，q表示命题“B干了这件事”，r表示命题“C干了这件事”，s表示命题“D干了这件事”。由于已知这事只能是A、B、C、D四人中的一个人干的，

所以四个命题中的任何两个命题都不可能同时是真的。这可以表达为以下公式：

$$\neg(p\wedge q)\wedge\neg(p\wedge r)\wedge\neg(p\wedge s)\wedge$$
$$\neg(q\wedge r)\wedge\neg(q\wedge s)\wedge\neg(r\wedge s)$$

在前面的题目中，A、B、C、D每个人所说的话可以依次用q、s、¬r、¬s来表示。同时已知其中只有一个人说的是真话。所以其中的任何两句话都不可能同时是真的。这个条件也可以表达为以下公式：

$$\neg(q\wedge s)\wedge\neg(q\wedge\neg r)\wedge\neg(q\wedge\neg s)\wedge$$
$$\neg(s\wedge\neg r)\wedge\neg(s\wedge\neg s)\wedge\neg(\neg r\wedge\neg s)$$

以上两个公式就是题目中给出的两个前提公式。由此可以推出什么结论呢？首先我们把这两个公式的合取转化为合取范式：

$$(\neg p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg s)\wedge$$
$$(\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg q\wedge\neg s)\wedge(\neg r\vee\neg s)\wedge$$
$$(\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg q\vee s)\wedge(\neg s\vee r)\wedge(r\vee s)$$

现在要进一步求出简化的合取范式。

我们先运用排除律和显示律于合取范式的第5和第8合取项（即“$(\neg q\vee\neg s)\wedge(\neg q\vee s)$”），即可显示出第11个合取项：$\neg q$；然后运用于第6和第9合取项（即“$(\neg r\vee\neg s)\wedge(\neg s\vee r)$”），即可显示出第12个合取项：$\neg s$；再后运用于第9和第10合取项（即“$(\neg s\vee r)\wedge(r\vee s)$”），即可显示出第13个合取项：$r$；最后运用于第2和已经被显示出来的第13合取项（即“$(\neg p\vee\neg r)\wedge r$”），即可显示出第14个合取项：$\neg p$。销去重复的合取项之后，我们得到以下公式：

$$(\neg p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg s)$$
$$\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge$$
$$(\neg q\vee\neg s)\wedge(\neg r\vee\neg s)\wedge(\neg q\wedge r)\wedge(\neg q\vee s)\wedge$$

$$(\neg s\vee r)\wedge(r\vee s)\wedge\neg q\wedge\neg s\wedge r\wedge\neg p$$

接着再运用排除律和吸收律于上述公式，把应排除或吸收的合取项全部予以精减后，就可得到该公式的简化的合取范式：

$$\neg q\wedge\neg s\wedge r\wedge\neg p$$

从这一范式中我们看到p、q和s是假的，而只有r是真的，也就是说，命题“C干了这件事”是真的。简化的合取范式是唯一的合取范式，所以这个结论是可靠的。

在用命题逻辑的基础理论来处理现实生活和生产实践中的问题时，其一般方法包括如下几步：第一，将所要处理的问题改写成相应的命题表达式；第二，所写出的表达式若值为1则保持不变，若值为0则将它取反而变为其值为1的表达式；第三，若得到一组表达式：$T_1=1$，$T_2=1$，…，$T_n=1$，则将它们进行合取而得到一个表达式：$T_1\wedge T_2\wedge\cdots\wedge T_n=1$；第四，对$T_1\wedge T_2\wedge\cdots\wedge T_n=1$进行化简，当然其值不确定的表达式不参加化简。

我们再举一例。

有件谋杀案，经过公安侦察得到下面若干事实：（1）凶手或是甲或是乙；（2）若凶手是甲，则谋杀不能发生在午夜前；（3）若乙的供词是正确的，则谋杀发生在午夜前；（4）若乙的供词不正确，则在午夜前被害者房里灯光未灭；（5）在午夜前被害者房里灯灭了，甲无供词。试问：到底谁是凶手？

解：先将上面各条转换为命题表达式：p＝甲是凶手，q＝乙是凶手，r＝谋杀发生在午夜前，s＝乙的供词是正确的，t＝午夜前被害者房里灯光未灭，u＝甲无供词。于是案件中调查得到的（1）——（5）条可转换为命题表达式：（1）$p\vee q$，（2）$p\longrightarrow\neg r$，（3）$s\longrightarrow r$，（4）$\neg s\longrightarrow t$，（5）$\neg t\wedge u$。因表达式（1）——（5）为真，所以它们合取也真，即：

$$(p\vee q)\wedge(p\longrightarrow\neg r)\wedge(s\longrightarrow r)\wedge(\neg s\longrightarrow t)\wedge(\neg t\wedge u)=1$$

此公式经过化简可得：

$$\neg p \wedge q \wedge s \wedge r \wedge \neg t \wedge u = 1$$

由此式看出p假而q真，用自然语言表达即：甲 不是凶手 而乙是凶手。

以上只是一些日常实例。而命题逻辑的应用最重要的是在电子计算机以及其他逻辑电路领域。这里我们简单介绍一下门电路问题。

门电路是电子计算机中主要的单元电路。机器中控制信号的产生以及二进制运算的实现都由它完成。在如何由门电路组合起来而产生各种信号及实现二进制运算时，命题演算的基本公式及化简方法得到广泛应用。我们来考察一下命题演算是如何跟门电路联系起来的。

电子计算机的控制信号是以高电压和低电压来体现。在二进制运算时，也是以高电压代表"1"，低电压代表"0"来体现（当然这里指的是正逻辑电路，而负逻辑电路正与此相反）。这样计算机中信号的高电压与低电压，正好对应于命题演算中 命 题 的"真"和"假"（即"1"和"0"）。电子计算机中门电路基本的有三种：

（1）"与"门电路。如图8-1用Y表示，它的逻辑功能是：当输入A、B都是高电压时，输出P才是高电压。A、B是其他情况时，P是低电压。这种逻辑功能正好和命题演算中合取一致，因此可以用同样的公式表示为：$P = A \wedge B$。

（2）"或"门电路，如图8-2,用H表示,它的逻辑功能是：当输入A或B中有一个是高电压时，输出P就是高电压。只有A和B都是低电压时，P才是低电压。这种逻辑功能 正好和命题演算中的析取一致，因此可以用同样的公式表示为：$P = A \vee B$。

（3）"非"门电路。也称反相器,如图8-3,用F表示，它的逻辑功能是：当输入A是高电压时，输出P是低电压；当A是低

电压时，则P是高电压。这种逻辑功能正好和命题演算中的非运算一致，因此可以用同样的公式表示为：$P=\neg A$。

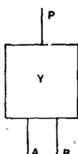


图 81

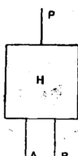


图 82

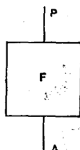


图 83

由图81至83可以看出，门电路输入信号的高电压和低电压跟命题演算中命题的真和假相对应，门电路中两个或两个以上信号通过“与门”、“或门”、“非门”跟命题演算中两个或两个以上命题的“合取”、“析取”、“非”运算相一致。用数学语言说两者是同构的，因此由门电路组成的各种复杂电路都可以用命题演算的公式来表示。对复杂电路的化简，可以先将其对应公式用命题演算中的化简方法进行化简，再根据化简后的公式画出电路图来，就是复杂电路的化简图。和接点电路一样，门电路也可推导出一系列跟命题演算中基本公式和常用公式相一致的公式。因为门电路跟命题演算同构，所以化简由门电路组成的复杂电路时，可以直接引用命题演算中的公式。

例如图84：

其对应的公式为：$P=(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge\neg B)\vee(A\wedge B)$

我们对这一公式进行化简：

$$\begin{aligned}P&=(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge\neg B)\vee(A\wedge B)\\&=((A\vee\neg A)\wedge\neg B)\vee(A\wedge B)\\&=\neg B\vee(A\wedge B)\\&=(\neg B\vee A)\wedge(\neg B\vee B)\end{aligned}$$

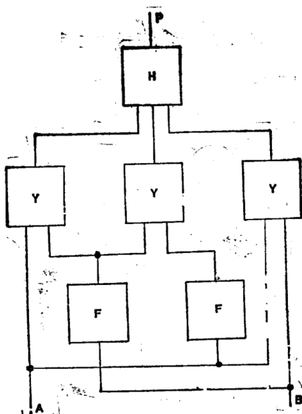


图 84

$$=\neg B\vee A$$
$$=A\vee\neg B$$

跟化简后的公式相对应的门电路图即图85：图85跟图84是等效线路。在化简当中，命题演算的领先作用是明显的。

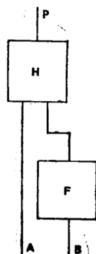


图 85

第二节 谓词逻辑的应用

跟命题逻辑的情况一样，谓词逻辑也具有广泛的应用领域。比如对于下面这样的较为复杂的推理问题，就必须运用谓词逻辑的工具给予分析。这个问题是：前提，（1）对于每一个x和y，如果x在y之前（xHy），那么并非y在x之前，（2）对于每一个x、y和z，如果x在y之前，y在z之前，那么x在z之前；（3）对于每一个x和y，如果x在y之前，那么x不等于y（$x \neq y$）；（4）对于每一个x、y和z，如果y在x和z之间（Exyz），那么或者x在y之前并且y在z之前，或者z在y之前并且y在x之前；（5）对于每一个x和z，如果$x \neq z$，那么就有一y，使得y在x和z之间；结论，对于每一x和z，如果x在z之前，那么就有一个y，使得x在y之前并且y在z之前。

我们在分析中首先把前提形式化即变成谓词语言如下：

（1）$(x)(y)(xHy \longrightarrow \neg yHx)$

（2）$(x)(y)(z)(xHy \wedge yHz \longrightarrow xHz)$

（3）$(x)(y)(xHy \longrightarrow x \neq y)$

（4）$(x)(y)(z)(Exyz \longrightarrow (xHy \wedge yHz)$
$\vee (zHy \wedge yHx))$

（5）$(x)(z)(x \neq z \longrightarrow (\exists_y)\, Exyz)$

从这五个前提出发，我们根据谓词演算系统的规则就可以推证出结论（具体证明从略）：

$(x)(z)(xHz \longrightarrow (\exists_y)(xHy \wedge yHz))$

不难看出，用谓词符号表示语句，用谓词演算中的推理规则及定理处理科学及现实生活中的一些逻辑关系问题，这是谓词逻辑应用的主要方面。我们再举两个例子。

例1.求证"如果有一个儿子，那么就有一个父亲"这一推理

在逻辑上正确。

证明：引入谓词符号F(x)表示"x是儿子"，G(y)表示"y是父亲"，则例子中的陈述表示为：

$$(\exists_x)F(x)\longrightarrow(\exists_y)G(y) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

但是这个公式并没有体现出作儿子和作父亲的条件，所以无法判断其真假。为此必须对公式中出现的谓词加以分析变换。因为"儿子"这一概念包含"是男性"、"有双亲"；"父亲"这一概念包含"有妻子"、"有孩子"。于是谓词符号可以进一步变换。H(x)表示"x是男性"，K(y, z, x)表示"y、z是x的双亲"即y是x的父亲，z是x的母亲。于是，

F(x)就等于表达式：$H(x)\wedge(\exists_y)(\exists_z)$
$K(y、z、x)$。

G(y)就等于表达式：$(\exists_z)(\exists_x)K_{(y、z、x)}$。

将F(x)和G(x)的新表达式代入(1)式就得到：

$$(\exists_x)(H(x)\wedge(\exists_y)(\exists_z)K_{(y、z、x)})\longrightarrow$$
$$(\exists_y)(\exists_z)(\exists_x)K(y、z、x)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

因此，如果要证明公式(1)永真就可转换为证明公式(2)永真。下面证明公式(2)永真：

根据"存在"对"合取"的分配规则，有：

$$(\exists_x)(H_{(x)}\wedge(\exists_y)\exists_z)K_{(y、z、x)})\longrightarrow$$
$$(\exists_x)H(_x)\wedge(\exists_x)(\exists_y)(\exists_z)K_{(y,z,x)}$$

根据$p\wedge q\longrightarrow q$，有：

$$(\exists_x)H(x)\wedge(\exists_x)(\exists_y)(\exists_z)K(y, z, x)\longrightarrow(\exists_x)(\exists_y)(\exists_z)K(y, z, x)$$

根据传递规则，有：

$$(\exists x)(H(x)\wedge(\exists y)(\exists z)K(y, z, x))\longrightarrow$$
$$(\exists x)(\exists y)(\exists z)K(y, z, x)$$

根据存在交换定理，有：

$$(\exists x)(H(x)\wedge(\exists y)(\exists z)K(y,z,x))\longrightarrow$$

$$(\exists y)(\exists z)(\exists x)K(y,z,x)$$

最后一式就是前述（2）式被证明的结果，它是个永真公式，所以我们肯定，“如果有一个儿子，那么就有一个父亲”在逻辑上是正确的。

例2.求证在区间上一致连续的函数f（x）必然是连续的，其逆命题不一定正确。

证明：把一致连续的定义用符号表述如下：

$$(z)(<(0,z)\longrightarrow(\exists y)(x_1)(x_2)$$
$$(<(0,y)\wedge<(|x_1-x_2|,y)\longrightarrow$$
$$<(|f(x_1)-f(x_2)|,z)))$$

此公式读作：对于每个大于0的z，都存在一大于0的y，使得对于任意x_1、x_2，当$|x_1-x_2|$小于y时必有$|f(x_1)-f(x_2)|$小于z。其中x_1、x_2以f（x）定义区间为客体域、而z、y则以实数为客体域。将此公式换为下式并不改变它所表达的含义：

$$(z)(\exists y)(x_1)(x_2)(<(0,z)\longrightarrow(<(0,y)$$
$$\wedge<(|x_1-x_2|,y)\longrightarrow<(|f(x_1)$$
$$-f(x_2)|,z)))\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

把函数f（x）连续的定义用符号表述如下：

$$(x_1)(z)(<(0,z)\longrightarrow(\exists y)(x_2)(<(0,y)$$
$$\wedge<(|x_1-x_2|,y)\longrightarrow<(|f(x_1)$$
$$-f(x_2)|,z)))$$

此公式读作：对于任意的x_1，对于每个大于0的z，都存在一大于0的y，使得对于任意x_2，当$|x_1-x_2|$小于y时，必有$|f(x_1)-f(x_2)|$小于z。将此公式换为下式并不改变它所表达的含义：

$$(x_1)(z)(\exists y)(x_2)(<(0,z)\longrightarrow(<(0,y)$$
$$\wedge<(|x_1-x_2|,y)\longrightarrow<(|f(x_1)$$

$-f(x_2)|, z)))$ ……………………………………（2）

从（1）、（2）两式中看到，量词符号（$\exists y$）和（x_1）的位置不同。我们知道，由（$\exists y$）（x）$A(x, y)$ 真可推出（x）（$\exists y$）$A(x, y)$ 真，但反过来不一定成立。据此可得：若（1）正确可推出（2）正确，但（2）正确（1）不一定正确。这就证明了本题的陈述。本题也说明了函数的一致连续与连续概念的联系与区别。

第三节　逻辑代数的应用

逻辑代数在电路理论中具有广泛的用途，这一点，它和命题逻辑是一致的。此外，逻辑代数在思维领域中、在概率论中都有较广泛的用途。下面具体介绍。

一　用于分析逻辑问题

逻辑问题也称为智慧问题或推理问题，它们来自不同的领域，分析起来一般都比较麻烦。下面只举个例子，从中可以看出分析逻辑问题的途径。

例：某工厂有一部由3台机器A、B、C组成的联动机。这部联动机开动的条件是：（1）当机器A运转时，机器B也总是运转的；（2）当机器B运转时，机器C也总是运转的。根据安全条件的要求，必须在机器A停车的情况下，机器C也不运转。那么怎样才能满足这个要求呢？

解：设A表示机器A在运转，B表示机器B在运转，C表示机器C在运转。这样，题目给定的条件即为：

（1）$A = AB$，

（2）$B = BC$。对 $\overline{A}$ 来说，

$$\overline{A} = \overline{A}BC \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}\,C \cup \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

条件(2)排除了其中第二组结合($\overline{A}B\overline{C}$)。然而，根据联动机使用的安全条件的要求（在机器A停车的情况下，机器C也不运转），可以得出：$\overline{A}C=0$。按此，上述等式中第一组和第三组结合也不成立，剩下的仅为：

$$\overline{A}=\overline{A}\overline{B}\overline{C}$$

即当机器A不运转时，其他两台机器也不运转。由此可见，不存在A不运转而B运转的情况，故$\overline{A}B=0$，亦即：

$$B=AB$$

这是因为，既然当机器A停车时机器B必不运转，那就是说当机器B运转时A、B两台机器必然同时在运转，这就是同(1)、(2)一起决定三台机器协同运转的第三个条件。

二 用于有效推理及其证明

推理是一种思维形式，它是由一些判断过渡到新的判断的一种思维过程。正确的推理过程一般都是按照一定的"格式"进行的，这种推理"格式"就称为有效推理。精确地说，设前提为P_1、P_2、…、P_n，结论为R，则由P_1、P_2、…、P_n到R的推理称为有效的，当且仅当各前提的合取P_1、$P_2 \cdots P_n$蕴涵结论R：$P_1P_2\cdots P_n \Longrightarrow R$。

一个推理是有效的，当且仅当$(P_1P_2\cdots P_n \longrightarrow R)=1$。就是说，任一永真公式可以确定一个有效推理。

要判断一推理是否有效，除了利用真值表及算律检验外，还可以利用逻辑代数的基本公式和常用的有效推理检验，看看结论能否包含在它们所组成的一个"推理链"中，如果能，则推理是有效的；反之，如果要证明某一推理是无效的，则须选出一组真值，它能使各前提为真而结论为例。下面举两个例子。

例1. 证明推理$(P \longrightarrow Q)\cdot(R \longrightarrow \overline{Q}) \Longrightarrow (P \longrightarrow R)$是有效的。

证：$\because (R \longrightarrow \overline{Q}) \Longrightarrow (\overline{\overline{Q}} \longrightarrow \overline{R})$ （逆否法则）

$\Longrightarrow (Q \longrightarrow \overline{R})$ （对合律及代入原则）

$\therefore (P \longrightarrow Q) \cdot (R \longrightarrow \overline{Q}) \Longrightarrow (P \longrightarrow Q) \cdot (Q \longrightarrow \overline{R})$ （代入原则）

$\Longrightarrow (P \longrightarrow R)$（三段论法则）

∴原推理是有效的。（证毕）

例2．证明以下推理是无效的：

（1）$(P \longrightarrow Q) \cdot \overline{P} \Longrightarrow \overline{Q}$；

（2）$(P \longrightarrow Q) \cdot Q \Longrightarrow P$。

证：（1）取 $P = 0$，$Q = 1$，则 $P \longrightarrow Q = 1$，$\overline{p} = 1$，但结论 $\overline{Q} = 0$，故原推理是无效的。

（2）取$P = 0$，$Q = 1$，则$P \longrightarrow Q = 1$，$Q = 1$，但结论$P = 0$，故原推理是无效的。（证毕）

第三节　对传统形式逻辑的研究

用现代逻辑方法重新研究传统形式逻辑，这是当前国内外学术界特别重视的课题，它不仅显示了现代逻辑应用的广泛性，而且也表现了传统形式逻辑崭新的生命力。这方面的研究成果很多，下面我们只重点介绍一部分。

一　关于A，E，I，O的再构造

A、E、I、O是传统形式逻辑着重研究的命题，现代逻辑对它们所进行的形式化构造是：

A即SAP：$(x)(S_{(x)} \longrightarrow P_{(x)})$

E即SEP：$(x)(S_{(x)} \longrightarrow \neg P_{(x)})$

I即SIP：$(\exists x)(S_{(x)} \wedge P_{(x)})$

O即SOP：$(\exists x)(S_{(x)}\wedge\neg P_{(x)})$

我们还可以对A、E、I、O 的对当关系作进一步考虑，因为它们所代表的主谓项意义相同的命题间的对当关系是命题的真假关系，而命题逻辑方法表示的逻辑关系，从语义上说就是以命题真值联结词所代表的命题真值形式间的真假关系，因此，用命题逻辑的方法解释对当关系，这是完全可行的。

（一）矛盾关系

1. $\neg(A\wedge O)\wedge\neg(\neg A\wedge\neg O)$

2. $\neg(E\wedge I)\wedge\neg(\neg E\wedge\neg I)$

（二）等值关系

1. $A\Longleftrightarrow\neg O$

2. $E\Longleftrightarrow\neg I$

3. $I\Longleftrightarrow\neg E$

4. $O\Longleftrightarrow\neg A$

（三）下反对关系

$I\vee O$

（四）反对关系

$\neg(A\wedge E)$

（五）蕴涵关系

1. $A\longrightarrow I$

2. $E\longrightarrow O$

以上关系的表达式不但可以用真值联结词表现，而且还可以用命题演算的方法证明其有效性。我们首先规定：设A、E、I、O的主项都是有限集合，即$S=\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$，$i=1,2,\cdots,n$；而谓项为P；于是所有命题元素的基本结构是〔S_i—P〕即以S^i为主项，P为谓项的命题。这样，全称命题看作有穷元素S_i—P的合取，特称命题看作有穷元素S_i—P的析取，即：

$$A=(S_1—P)\wedge(S_2—P)\wedge\cdots\wedge(S_n—P)$$

$$E = (\neg S_1 - P) \wedge (\neg S_2 - P) \wedge \cdots \wedge (\neg S_n - P)$$

$$I = (S_1 - P) \vee (S_2 - P) \vee \cdots \vee (S_n - P)$$

$$O = (\neg S_1 - P) \vee (\neg S_2 - P) \vee \cdots \vee (\neg S_n - P)$$

利用以上规定我们可以对前述所有表达式进行证明。下面只举例证明下反对关系和反对关系

求证：$I \vee O$成立。

证：$\because$ $I = (S_1 - P) \vee (S_2 - P) \vee \cdots \vee (S_n - P)$

$O = (\neg S_1 - P) \vee (\neg S_2 - P) \vee \cdots \vee (\neg S_n - P)$

$$\therefore\ I \vee O = ((S_1 - P) \vee (S_2 - P) \vee \cdots \vee (S_n - P)) \vee ((\neg S_1 - P) \vee (\neg S_2 - P) \vee \cdots \vee (\neg S_n - P))$$

$$= ((S_1 - P) \vee (\neg S_1 - P)) \vee ((S_2 - P) \vee (\neg S_2 - P)) \vee \cdots ((S_n - P) \vee (\neg S_n - P))$$

最后的析取式明显是重言式。

$\therefore$ $I \vee O$成立。　　（证毕）

求证：$\neg(A \wedge E)$成立。

证：$\because$ $\neg(A \wedge E) = \neg A \vee \neg E$

$= O \vee I$

$= I \vee O$

$\because$ $I \vee O$成立，

$\therefore$ $\neg(A \wedge E)$成立。　　（证毕）

二　关于直言三段论的再构造

在传统形式逻辑中，直言三段论居于重要位置。早在亚里士多德时期，直言三段论已经初具公理系统。但是严格公理系统的建立却是由现代学者完成的。比如波兰逻辑学家卢卡西维茨首先将直言三段论构造了一个严格的公理系 统 CS。国外许多学者纷纷仿效卢氏的方法，从不同角度对直言三段论作了探讨和处理，

比如新西兰逻辑学家休斯等构造了系统AS。我们在此只介绍卢氏的系统CS。

（一）系统的初始规定

1. 语形部分

初始符号：（1）a，b，m；（2）A，I；（3）$\neg$，$\wedge$，$\longrightarrow$。

形成规则：

（1）若n_1，n_2是初始符号（1）中的符号，H是初始符号（2）中的符号，则n_1Hn_2是公式；

（2）若K和L是公式，则$\neg K$，$(K\wedge L)$和$(K\longrightarrow L)$是公式。

变形规则：

（1）代入规则（R_1）：公式中的a，b，m可用a，b，m中任一个代换，代换要完全并且同一；

（2）分离规则（R_2）：从公式K和$K\longrightarrow L$可推出L；

（3）重言式引入规则（R_3）：在一个证明中可引入任何CS直言式代换。

公理：（1）S_1：aAa；（2）S_2：aIa；（3）S_3：$mAa\wedge bAm\longrightarrow bAa$；（4）$S_4$：$mAa\wedge mIb\longrightarrow bIa$。

定义：（1）D_1：$bEa=\neg bIa$；（2）D_2：$bOa=\neg bAa$。

2. 语义部分

初始符号中a，b，m可解释为三段论的大项、小项和中项。A，I分别解释为“所有…是…”，“有的…是…”。$\neg$，$\wedge$，$\longrightarrow$是真值联结词。

形成规则和变形规则中的K，L是语形符号，可代表任何命题形式。

公理中的S_1即“所有a是a”，S_2即“有的a是a”，这都作为不证自明的真命题。S_3是第一格AAA式，S_4是第三格AII式。

定义表现了逻辑方阵中的矛盾关系。

（二）系统的定理证明

和其他公理系统类似，CS的每个证明也是一串公式的系列，其中每一公式或是公理，或是重言式，或是根据变形规则和定义从系列中在先的公式而导出的公式，每一证明的最后一行公式是定理。下面是对定理证明的举例。

定理1：$mEa \wedge bIm \longrightarrow bOa$

证：（1）$mAa \wedge mIb \longrightarrow bIa$　（S_4）

（2）$(p \wedge q \longrightarrow r) \longrightarrow (\neg r \wedge q \longrightarrow \neg p)$　（T）

（3）$(mAa \wedge mIb \longrightarrow bIa) \longrightarrow$
$(\neg bIa \wedge mIb \longrightarrow \neg mAa)$　（R_3）

（4）$\neg bIa \wedge mIb \longrightarrow \neg mAa$　（(1)，(3)，R_2）

（5）$bEa \wedge mIb \longrightarrow mOa$　（D_1，D_2，R_3）

（6）$mEa \wedge bIm \longrightarrow bOa$　（R_1）

在此证明中的（T）是命题演算中的定理。在CS系统中可以证明一部分直言命题变形法和所有直言三段论的有效式都是定理。例如：

定理2：$bEa \longrightarrow \neg bIa$

定理3：$\neg bIa \longrightarrow bEa$

定理4：$bOa \longrightarrow \neg bAa$

定理5：$\neg bAa \longrightarrow bOa$

定理6：$bAa \longrightarrow bIa$

定理7：$bIa \longrightarrow aIb$

定理8：$mAa \wedge bIm \longrightarrow bIa$　（第一格AII）

定理9：$mAa \wedge bAm \longrightarrow bIa$　（第一格AAI）

定理10：$mEa \wedge bAm \longrightarrow bEa$　（第一格EAE）

CS系统把由全称命题推出特称命题的推理形式也作为定理，这跟传统形式逻辑不存在主项是否存在的问题相一致。CS系统

的构造很有意义，它使我们看到了传统形式逻辑中所隐含的古典公理化的原型。

第四节 应用于其它学科

现代逻辑不仅在电子计算机、新兴科学学科和生产技术、机器翻译等领域具有广泛的用途，而且在哲学、语言学、古典文献研究等领域也具有广泛的实用价值。

我们知道：人工智能的研究就是要将人脑的逻辑思维进一步模拟和延伸。系统工程、管理科学的研究则着重建立和运用经济数学模型的理论和方法，分析整个国民经济和单个经济单位以及单个城市经济现象等等，从整体上提高了全面经济分析的水平。这些研究要采用数学方法的理论和方法论，这与电子计算机的广泛应用是分不开的。而计算机的分析、综合和逻辑设计的理论是建立在现代逻辑理论基础之上的。它的线路设计、信号转换及程序设计等，只有利用现代逻辑的成果和方法才有可能。至于在生产技术方面，现在的各种自动控制、遥控装置等等，都大量地应用现代逻辑知识。在机器翻译方面，用电子计算机把一种语言翻译为另一种语言，是靠一系列的逻辑推理来完成的。人们把原文中词的语法信息如词类、形态特征、语义特征、句法特征等存入机器翻译的词典中，电子计算机在翻译时首先查词典，查出有关词的上述信息，并以这些信息作为原始信息来进行一系列的逻辑推理，得出结论，如此一环扣一环地进行推理，最后得到译文输出。可以说，机器翻译过程实质上是一个逻辑推理过程，而机器翻译的研究必然要跟现代逻辑发生密切联系。

现代逻辑在哲学研究中的作用越来越明显。作为哲学研究对象的任何一种物质形态及其运动形态都具有空间形式和数量关系，这就是哲学和数学的内在联系。现代哲学在发展进程中，更

加强了同数学的联系，而现代逻辑就反映了这种联系。数学方法应用于哲学领域，也就是借助数学方法确切地刻划出事物的变化状态，从已知量推出未知量。而任何客观事物的变化都不能离开量变的阶段，量变贯彻于一切科学领域之中，哲学也不例外。这就在客观上提供了数学向哲学渗透的可能性和必然性。比如著名逻辑学家哥德尔证明的不完全性定理（即一个系统中的真命题是不可能都在该系统中得到证明）在哲学认识论上就有重要意义，它说明了辩证思维方法对于全面地完整地认识事物本质的必要性。现代西方某些学派的哲学家，特别是逻辑实证主义者大量地引用现代逻辑概念、符号和某些方法构造他们的哲学体系。虽然他们的观点有许多错误，但是他们也作了不少有科学意义的研究，并取得一些技术性成果。

现代逻辑和语言学研究关系密切。现代逻辑要研究语言形式就必须把自然语言符号化，从而为建立计算机用的语言提供了基础。特别是近二十年来，电子计算机的信息处理使人们对传统的语言学概念进行了严格的逻辑分析和演算，提出了精确的语言模型，即把语言学改造成为现代科学的演绎系统。现代逻辑的逻辑演算中的公式是自然语言的模型，而且是简化了的模型。这些公式是按照一定的规则构造成的，这种构造公式的规则在现代逻辑中称为形成规则。形成规则就是自然语言的语法模型。在逻辑演算中，由一些已知公式按照一定的规则能推得另一些公式，这种规则称为变形规则。变形规则就是在自然语言基础上进行逻辑思维的逻辑规律的模型。可见现代逻辑所研究的逻辑演算是自然语言的模型，逻辑演算的规律是自然语言的逻辑规律的抽象。

现代逻辑在古典文献研究、特别是逻辑史研究中也有很强的作用。现代中外学者无论在研究希腊古典逻辑，还是在研究印度因明学及中国古代名学方面，都在努力运用现代逻辑工具，因而取得不小成果。比如我国逻辑学家莫绍揆先生在对《墨子·小取

篇》的研究中，就曾“注重运用数理逻辑的观点来分析并整理它的基本概念及其逻辑体系”①。《小取篇》是墨家逻辑学说的代表之作。莫先生从现代逻辑角度详细分析了该篇的逻辑体系，比如分析第三大段时指出这是“谬误论”。这一大段有六个小段，第一小段说在推理过程中可以出现一个正常现象“是而然”，以及四个不正常现象“是而不然”、“不是而然”（原文缺）、“一周而一不周”（“周”原文作“害”）、“一是而一不是”，这四种不正常现象必须注意区别，否则便会得出错误的结论。从第二小段到第六小段便分别介绍这五种现象。

所谓“是而然”，可用下列公式代表：

$A=B$　　同时又有$CA=CB$

这是正常现象（人们期待出现的现象）。

所谓“是而不然”，可用下列公式代表：

$A=B$　　但$CA\neq CB$

所谓“不是而然”，可用下列公式代表：

$A\neq B$　　但$CA=CB$

所谓“一周而一不周”，可用下式代表：

AB一语，有时A遍及B各分子，有时则否。这是在谈逻辑上的周延性问题。

所谓“一是而一不是”，可用下列公式代表：

$f(A)=g(A)$，但$f(B)\neq g(B)$

这里，$f(x)$及$g(x)$表示含有x的一些词句，意思是说，经常有两句话$f(x)$和$g(x)$，当用A代入时，两句意义相同，当用B代入时，两句意义便不同了，我们必须注意，决不能疏忽。

莫先生指出，《小取篇》所列举的五个现象，不论正常的或不正常的，都是从简单的组合现象而来的，并未牵涉到其他的繁

① 参见莫绍揆：《数理逻辑初步》，上海人民出版社1980年版。

复过程。这表明《小取篇》的作者已经能够把日常的各种过程分解成为一些极简单的组合过程了。《小取篇》作者认为只要把这些极简单的组合过程的正常的和不正常的现象注意到了，问题也就容易解决了，错误也容易避免了。

莫先生的如上分析为我们运用现代逻辑工具研究古典文献作出了楷模。

第九章　数学中的逻辑问题

人们对逻辑的了解，大多通过传统形式逻辑读物或中学语文课本。其实从科目间的联系来看，跟逻辑学关系最密切的科目并不是语文，而是数学。

第一节　数学与逻辑

一　不同的领域

数学和逻辑学研究的领域是不完全相同的。我们先看这样两个例子：

例1．“$2+3=5$”的算式是对的。

“$2\times3=5$”的算式是错的。

例2．“如果$2\times3=5$，则$2+3=5$”的命题是对的。

“如果$2+3=5$，则$2\times3=5$”的命题是错的。

我们知道，“2”、“3”、“5”等数字都是对现实世界中各种具体数量的抽象，例1就是直接表明了这样一种数量关系：当“2”与“3”是相加关系的时候，它们与“5”是等于关系；当“2”与“3”是相乘关系的时候，它们与“5”不是等于关系。数学就是这样抽象地研究各种数量关系的。因此例（1）是数学问题。

例2似乎也是在讲数学问题，其实并不完全如此。它只是通过数学问题来阐明“如果…则…”这种假言命题的特点。在假言

命题中，紧跟“如果”之后的部分称作“前件”，紧跟“则”之后的部分称作“后件”。假言命题的特点有：前件假而后件真，则整个假言命题是真的。因此我们要是不用“$2\times3=5$”和“$2+3=5$”的数学例子，而是用其他例子也可以，比如说：

“如果你能吞下一座山，则太阳从东方升起”的命题是对的。

因为尽管事实上你决不能吞下一座山去，但是也决不可否认太阳从东方升起的事实。假言命题的特点还有：前件真而后件假，则整个假言命题是假的。因此我们也可以说：

“如果太阳从东方升起，则你能吞下一座山”的命题是错的。

因为完全可以肯定太阳从东方升起的事实，但是决不可以肯定你能吞下一座山去。这种假言命题和“如果$2+3=5$，则$2\times3=5$”的命题一样都是荒谬的。我们知道，概念、命题和推理都是人类的思维形式，逻辑学就是研究思维形式的科学，例2是讲命题形式，因此它属于逻辑学问题。

我们再从一般理论上谈谈数学和逻辑学的不同领域。

（一）数学研究的领域是现实世界的数量关系和空间形式。数学大致可以分成两类：一类是研究现实世界的数量关系的；一类是研究空间形式的。比如算术、代数是研究数量关系的，几何是研究空间形式的，三角是两类情况都研究。整个数学，包括初等数学和高等数学都是以数和形作为研究对象的。

（二）逻辑学研究的领域却是人类主观世界的思维形式及其规律，以及人们认识现实世界的简单的逻辑方法。在现代汉语里，“逻辑”是个多义词。例如：

1.“研究中国革命的逻辑”。这里的“逻辑”一词是指客观事物发展变化的规律。

2.“揭露帝国主义的强盗逻辑”。这里的“逻辑”一词是指

某种特殊的理论、观点或看问题的方法。

3．“研究解题的逻辑思路”。这里的“逻辑”一词是指人们思维的规律、规则和步骤。

4．“人们要学习逻辑知识”。这里的“逻辑”一词是指一门学问，即逻辑学。

我们在本书所涉及的逻辑内容，主要是第3、4两种情况。

逻辑学并不是研究思维的一切方面，只是研究思维的形式和规律，为人们提供认识和论证的工具。比如“所有s都是p”，其中s和P叫做逻辑变项。与此相反，“所有”和“都是”在同类型的判断中，其含义是不变的，因此，我们把“所有”和“都是”叫做逻辑常项。任何思维形式都包含有逻辑变项和逻辑常项。

我们只有明确了逻辑学所研究的领域和数学所研究的领域的不同点，才能加强在数学学习中对于思维形式的抽象和总结能力。

二 相似的特点

数学和逻辑学在方法和形式上有着许多相似点，这些相似点也反映了这两门学科的内在联系。我们还是从具体的实例讲起。

比如数学证明题，都是给出某些已知条件，求证某一命题，而且从直观上看，大多数证明题所给的已知条件并不能直接证出需证的命题，时常还要使用已学过的某些定义、公理和定理，再加上该题的已知条件，先进行“架桥”的工作，即通过一步或几步推证出可以直接证得需证命题的条件。这种最一般的几何证明路线，实际是这样的：

已知：条件A和已学某些定义，公理及定理M（这里的“和”我们可以采用逻辑符号“∧”来表示，即已知：A∧M）。

求证：命题B。

证明：主要是两大部分：

（一）从$A \wedge M$可以推证出条件W（这W可能是一步或几步推出，这里的“推出”我们可以采用逻辑符号“$\longrightarrow$”来表示，因此：$A \wedge M \longrightarrow W$）。

（二）从W可以直接推证出命题B（即：$W \longrightarrow B$）。

这种最一般的数学证明路线，我们可以将其表示成一个总的公式：

$$(A \wedge M \longrightarrow W) \wedge (W \longrightarrow B) \longrightarrow B。$$

这种证明路线或总的公式，给人们在数学学习中带来多少胜利，带来多少愉快！其实这种路线或公式恰恰就是逻辑学所要研究的思维形式之一，即演绎推理中的三段论。逻辑学将三段论的公式一般表示为：

$$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \longrightarrow r。$$

逻辑学认为，p，q，r等等是命题变项，因此可以代入任何命题或公式，比如用“$A \wedge M$”代入“p”，用“W”代入“q”，用“B”代入“r”，这样不就能得到“$(A \wedge M \longrightarrow W) \wedge (W \longrightarrow B) \longrightarrow B$”的公式了吗？而且逻辑学还把自己所表示的三段论公式“$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \longrightarrow r$”纳入一种公理系统，它既是一个需要从已知条件来求证的命题，又是一个可以用来证明其他命题的条件。

数学和逻辑学的相似点可概括为：

第一，高度的精确性　数学和逻辑学本身都要求自己具有体系的严密性以及结论的确定性，因为它们命题的证明都是建立在精密的更高的严密推理上，这种推理对于每个人来说，都必须是无可争辩的和确定无误的。比如$2 \times 2 = 4$，$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \longrightarrow r$便是不可反驳、无可争辩的事实。

第二，高度的抽象性　抽象性在简单的计算中就已经表现出来，我们用抽象的数学和逻辑学知识，并不打算每次都把它们同具体的东西联系起来。比如几何学上的点、线、面等形状，就舍

弃了现实对象的所有其它具体性质。逻辑学上使用符号和公式的方法也是一种“思维的演算”，它是从若干具体科学的推理中抽象出来，只是对推理的形式结构进行抽象的研究。

第三，应用的广泛性　现代逻辑学也是这样，它为现代科学提供了严密的演绎科学方法论，因而它越来越广泛地被应用于各种科学技术和生产部门：不仅已普遍地应用于数学、计算机科学、控制论、生物学、心理学等自然科学领域，而且已开始被广泛地应用于哲学、语言学、教育学、考古学、管理科学等社会科学领域，并都取得了积极的成果。可以说，数学和逻辑学是人类文明的两块基石。

第二节　推理证明的一般方式

按照不同的角度分析，证明可以分为多种多样：

一、按照根据的性质，即按照论据是一般原理还是特殊实例，证明可以分为演绎证明和归纳证明两种。

二、按照求证的方向，即按照对论题是直接求证还是间接地先证其反命题或等值命题，证明又可以分为直接证明和间接证明。

三、按照思考的线索，即按照寻求论证的思路是从条件出发还是从结论出发，证明可以分为顺推求证和逆推求证两种。

此外，在数学领域还有经常用到的数学归纳法。下面分别讲述。

一　演绎推理证明和归纳推理证明

证明可以看作是特殊形式的推理，论题相当于推理中的结论，论据相当于推理中的前提。因此，我们先讲一下演绎推理和归纳推理。

（一）演绎推理　演绎推理是由一般命题到特殊命题的推理，也就是由一般原理推出特殊情况知识的思维过程。

（二）归纳推理　归纳推理是由特殊命题到一般命题的推理，也就是由特殊情况知识推出一般原理的思维过程。归纳推理有两种常见的形式：完全归纳推理和不完全归纳推理。

1.完全归纳推理。它是研究了某类事物中的每一个对象，然后概括出这类事物的一般性结论。完全归纳推理的推理形式是：

S_1具有（或不具有）P，

S_2具有（或不具有）P，

…　　　　…

S_n具有（或不具有）P，

（S_1，S_2，…，S_n是A类事物所有的对象）

所以，A类事物具有（或不具有）P。

完全归纳推理考察了某类事物的所有对象，因而由正确的前提必然能得到正确的结论。

2.不完全归纳推理。它是通过对某类事物中的部分对象的研究，概括出关于该类事物的一般性结论。不完全归纳推理的推理形式是：

S_1具有（或不具有）P，

S_2具有（或不具有）P，

…　　　　…

S_n具有（或不具有）P，

（S_1，S_2，…，S_n是A类事物中的部分对象，在考察中未发现矛盾情况）

所以，A类事物具有（或不具有）P。

不完全归纳推理只考察了某类事物的一部分对象，因而由此所得出的结论只能是一种猜测或假设，只具有一定程度的可靠

性。

跟上述所论推理相对应，下面讨论证明问题。

（一）演绎证明　是用演绎推理来证明论题的方法，也就是从包含在论据中的一般原理，推出包含在论题中的特殊事实。

演绎证明的特点在于：它的论据往往是一般的原理，而论题往往是特殊的场合。我们在进行演绎证明时，应该注意是否把一般原理正确地应用到特殊场合。如果我们把一般原理应用到不适合这一原理的特殊场合，尽管一般原理是对的，那也不能必然地确立论题的真实性，即不能达到证明的目的。

（二）归纳证明　是用归纳推理来证明论题的方法，也就是从包含在论据中的个别、特殊事实，推出包含在论题中的一般原理。根据归纳推理的不同形式，归纳证明也分为完全归纳证明和不完全归纳证明两种。

1.完全归纳证明　是通过考察适合论题条件的一切可能情况，从而确定论题的真实性。在用完全归纳证明时，必须把各种可能情况都考虑进去，做到不遗漏和不重复。

完全归纳证明考察了适合论题条件的一切可能情况，因而由真实的论据，必然能正确地断定论题的真假。这种方法在数学中是经常采用的，它有助于人们养成全面思考问题的习惯。

2. 不完全归纳证明　是通过考察适合论题条件的部分特殊情况，从而探索论题的真实性。

例：设n为任意自然数，求证：7^n+3n-1是9的倍数。（此题的严格证明要用到后面将要讲的数学归纳法；这里只讲初步证明）

证明：

若$n=1$，则原式$=7+3-1=9$，为9的1倍；

若$n=2$，则原式$=7^2+3\times2-1=54$，为9的6倍；

若$n=3$，则原式$=7^3+3\times3-1=351$，为9的39倍；

若$n=4$，则原式$=7^4+3\times4-1=2412$，为9的268倍；

…　　　　…

所以，若n为任意自然数，原式是9的倍数。

很明显，这种不完全归纳证明带有某种经验性、偶然性和不可靠性。例如，设n为任意自然数，求证：$n^2+n+72491$的值都是素数。我们按照上述方法，若$n=1, 2, 3, \cdots$延续地成百上千地代入，都可以得出原式的值是素数。然而，使人吃惊的是，当$n=72490$时，原式$=72490^2+72490+72491=72491^2$，其值是一个合数，而不是素数。这说明，应用不完全归纳证明，即使进行成百上千次地有效验证，也不能做出必然肯定的结论。不完全归纳证明不能作为严格的数学证明，它只能起印证的作用。但是，在人们认识真理的过程中，这种证明方法仍有它的积极意义。科学上有不少重要的假说，是通过不完全归纳证明提出来的；数学中有不少重大的发现，是由不完全归纳证明先提供线索（如，哥德巴赫猜想，四色问题等）；生产斗争和科学实验中许多发明创造，也是受到不完全归纳证明的启发。在数学证明中，人们也常常应用不完全归纳证明所提供的思维方法，通过考察论题的部分特殊情况，探明证题线索，为下一步的严格证明铺出道路。

二　直接证明和间接证明

按照对论题是直接求证还是间接地先证其反命题或等值命题，证明又可以分为直接证明和间接证明。

（一）直接证明　由论题的条件出发，以有关的定义、公理、定理为大前提，通过若干次直接的推理而得到论题的结论，这样的证明方法就称作直接证明。直接证明的一般形式是：

$$\left.\begin{array}{l}\text{本题条件}\\\text{前此定义}\\\text{前此公理}\\\text{前此定理}\end{array}\right\}\Longrightarrow\cdots\Longrightarrow\text{结论}$$

在数学中，在现代逻辑中，命题的推理证明大多采用直接证明。我们在前面命题演算和谓词演算中已经讲了很多，其中大部分都是采用直接证明。

（二）间接证明　对有些论题的证明采取直接证明方法会过于繁难；甚至大前提不足以推出具体结论。这时，可以从论题结论的反面出发，根据有关的定义、公理、定理为大前提并结合原论题的条件，通过推理而得出与公理、定理或条件相矛盾，或者自相矛盾的结果，从而反过来断定论题结论的反面不能成立。这样也就证明了正面的论题结论成立。这种不从正面而从反面证明论题真实性的方法，称为间接证明。间接证明的一般形式是：

$$\left.\begin{array}{l}\text{结论反面}\\\text{本题条件}\\\text{前此定义}\\\text{前此公理}\\\text{前此定理}\end{array}\right\}\Longrightarrow\cdots\Longrightarrow\text{矛盾结果}$$

关于间接证明要注意以下两点：

第一，只有论题的矛盾命题才能作为矛盾论题。论题的反对命题不能作为矛盾论题。因为，我们由一个命题的反对命题是假的，不能必然推出这个命题是真的。

第二，在利用充分条件假言推理，从否定后件“q”进而否定前件（矛盾论题）“p”时，必须注意，“如果p则q”是否真正

成立。只有在“如果p则q”真时，才能由否定“q”进而否定矛盾论题“p”。

如果对间接证明进一步划分，它包括有反证法和同一法两种。

1．反证法　应用反证法证明数学命题时，一般分下面几个步骤：

（1）分清待证论题“如果p则q”中的条件和结论，即明确p为条件，q为结论；

（2）进入反证：作出与待证论题的结论q相矛盾的假设，即设非q成立；

（3）以待证论题的条件p和假设的非q，以及前此早被肯定为真的定义、公理和定理等（一般用希腊字母 Γ 表示）为总前提，按照规则通过正确的推理形式进行推理，最后推出逻辑矛盾r和非r的结果；

（4）断定产生矛盾结果的原因，在于开始所作的假设非q不正确，于是原结论q成立。这就间接地证明了待证论题。当然在这里需要搞清楚的是，作为（3）中结论的逻辑矛盾r和非r，事实上是反过来对它的总前提即待证论题的条件p和假设的非q以及其他定义、公理和定理的全部否定，但是由于定义、公理和定理早已被肯定为真，而原条件p在待证论题中也是假设为真的，因此被否定的只能是非q，也就是只能得到非非q，即q。

（5）因此，从待证论题的条件p能够得到结论q，于是“如果p则q”成立。

我们将如上步骤形式化如下：

（1）求证：$p \longrightarrow q$。

（2）设：$\neg q$。

（3）推理：$\Gamma \wedge p \wedge \neg q \longrightarrow r \wedge \neg r$。

（4）∴ $\neg(\Gamma \wedge p \wedge \neg q)$，

即 $\neg \Gamma \vee \neg p \vee \neg\neg q$，

亦即$\neg r \vee \neg p \vee q$。

又∵r，p早已肯定为真，

∴$\neg r$，$\neg p$必为假，

∴只有q为真。

（5）∴断定：$p \longrightarrow q$。

不难看出，对反证法的全面理解必须具备假言推理、联言推理、选言推理、矛盾命题、排中律等普通形式逻辑的知识。

在上述（3）中所谓推出逻辑矛盾，我们形式地表述为$r \wedge \neg r$，但是具体情况却还比较复杂。这些具体情况大致包括：第一，推出的结果与已知条件矛盾；第二，推出的结果与已知定义矛盾；第三，推出的结果与已知公理矛盾；第四，推出的结果与已知定理矛盾；第五，推出的结果与所作假设矛盾；第六，推出两个互相矛盾的结果。这几种情况是互相联系的，对于同一个命题从不同的角度进行推理，常常可以推出不同性质的矛盾结果，从而得到不同的证明方法。

一般地说，如下类型的待证命题更适合于采用反证法：第一，某些初始命题。在演算系统中按照公理化方法最初建立的只是数量不多的定义和公理，因此某些初始的性质或定理，常常难以找到直接证明的论据，在这种情况下可以采用反证法证明。第二，否定性命题。结论以否定形式出现的命题，直接证法一般不易入手，而用反证法有希望成功。第三，唯一性命题。结论以"…只有一个…"，"…唯一存在"等形式出现的命题，用反证法证明其唯一性，常常能得到简洁清楚的证明。此外，有如结论以"至多…"或"至少…"的形式出现的命题，以及某些定理的逆命题，当直接证明不甚方便时，也可用反证法一试。

应用反证法证题时，还应注意下面三点：第一，必须周密考察待证论题的结论，如果跟此结论相矛盾的方面有多种情况，必须逐一加以否定，切不可遗漏；否则待证论题难以得证；比如跟

“=”相矛盾的方面除了有“>”之外还有“<”。第二，整个反证当中的推理过程必须完全正确；否则，即使推出矛盾结果，也不足以证明开始所作的假设“非q”是错误的。第三，在反证的推理过程中一定要使用待证论题中的已知条件；否则，要么推不出矛盾结果，要么不能断定所推出的结论是错误的；这一点在现代逻辑的演算系统中，特别是自然推理系统中表现得更为明显。

反证法是一种重要的证明方法，它不仅可用于初等数学，而且在高等数学和逻辑演算中也能广泛应用。其中的一些重要结论，从最基本的性质、定理，到某些难度较大的世界名题，往往是用反证法得到证明的。因此，深刻理解反证法的实质，切实掌握它的解题要领，这对于提高解题能力有着十分重要的意义。

2．同一法　对于符合同一原理的论题，当直接证明有困难时可以改证和它等价的逆命题，这种证明方法称作同一法。我们知道，在一般情况下，当原命题成立时，它的逆命题与否命题均未必成立，而其逆否命题则必定成立。也就是说，互逆或互否的两个命题，它们的真实性并非一致，可以两个都真、都假或一真一假；而互为逆否的两个命题，它们的真实性却完全一致，真则同真，假则同假。互为逆否的两个命题具有同真同假的性质，称作逆否命题的等价（等效、等值）原理。用符号表示为：

如果p则q$\Leftrightarrow$如果$\neg$q则$\neg$p（此式或只理解成前者是原命题，后者是逆否命题，它们之间等价；或理解成它们互为逆否命题，即任一为原命题，另一则为逆否命题）。

如果q则p$\Leftrightarrow$如果$\neg$p则$\neg$q（此式或只理解成前者是原命题的逆命题，后者是原命题的否命题，它们之间等价；或理解成它们互为逆否命题，即任一为原命题，另一则为逆否命题）。

这里的符号“$\Longleftrightarrow$”表示“从左边可以推出右边，并且从右边也可以推出左边”，读作“等价于”。我们不难用反证法对逆否命题的等价原理给出严格的证明。

现在有这样一种情况：有一些结构较为特殊的命题，人们可以从原命题的正确，断定其逆命题成立，就是说，尽管在一般情况下原命题跟其逆命题并不等价，但是在一些特殊情况下却存在着原命题跟其逆命题等价的现象。例如，命题“等腰三角形顶角的平分线是底边上的“中线”是一个真实的命题。分析这个命题的条件和结论不难发现，条件中所指的“顶角平分线”有一条且只有一条；结论中所指的“底边上的中线”也是有一条且只有一条。这就是说，命题的条件和结论所指的对象都唯一存在。由于这个命题是正确的，所以命题的条件和结论所指的概念外延完全相同，是同一概念。因而，如果把条件中的“顶角平分线”和结论中的“底边上的中线”交换位置，那么所得到的逆命题“等腰三角形底边上的中线是顶角的平分线”也必然是正确的。由此可见：当一个命题的条件和结论都唯一存在，它们所指的概念外延完全重合时，这个命题与它的逆命题等价。这个道理称作同一原理。运用这一原理证题的方法就称作同一法。这是一种很特殊的方法。同一法和反证法的适用范围是不同的。同一法的局限性较大，通常只适用于符合同一原理的命题；反证法则普遍适用，对于能用同一法证明的命题一般都能用反证法证明。

三　形式证明和非形式证明

从直观上讲，现代逻辑演算中的公理推理系统和自然推理系统，都是很明显的形式证明。而在一般科学论述中却广泛应用的是非形式证明；其实在一般数学当中也都应用着非形式证明。

所谓形式证明，就是在推演过程中运用人工符号语言，按照推理规则一步一步地、没有跳跃地（如有省略则需说明）从一系

列前提严格地推演出结论的证明方法。以形式证明的本来要求，即使是非常明显的步骤也要不厌其烦地根据推理规则书写出来。当然，在形式证明系统中那些非常明显的步骤时常经过证明以后而总结成导出规则，这就为后来对命题形式的证明进行必要的简化构成了根据。但是这并没有从本质上改变形式证明中步步严格表述的特点。

所谓非形式证明，就是在推演过程中虽然也有的运用必要的人工符号语言（如数学等），但是较多的要运用自然语言，而且并不形式地严格表述出从前提到结论的每步过程，它舍掉了许多比较明显的步骤，只是给出证明的一个主线或速写。但是这个主线和速写决不是含混不清，它要求证据是充分的，使熟悉这种证明的人能够直观上接受和理解，甚至知道省略的步骤是什么。由此看出，形式证明要求证明中步骤详尽地运用人工符号语言进行推演，任何一个逻辑环节都不能省略（导出规则只是把某部分逻辑环节简化，而不是省略掉）；非形式证明则要求或运用人工符号语言，或运用自然语言，而推演过程却完全可以简明扼要、主线清楚。具体点说，非形式证明的一般要求是：第一，明白指出公理或先前定理的每一次使用，第二，逻辑推理结构要展现清楚，但不用写出逻辑推理规则或根据。

当然，形式证明和非形式证明之间是有联系的。形式证明的推演过程可以简化为非形式证明的推演过程，而在非形式证明的推演过程中任何一个步骤也都可以扩展为合理数目的形式推理步骤。这样，我们可以利用这种联系检验非形式证明过程的逻辑上的正确与否。可以说，非形式证明的逻辑上的正确性，是以扩展为形式证明之后的逻辑上的正确性为保障的。现代逻辑对于形式证明的研究，主要是研究各种非形式证明中的逻辑正确性问题。

四　顺推求证和逆推求证

在寻求论题证明方法（演绎、归纳、直接、间接等等）的时候，都有一个思考的路子、线索或途径的问题。按照思考的线索，即按照寻求论证的思路是从论题的条件出发还是从其结论出发的不同，证明又可分为顺推求证和逆推求证。顺推求证也称为顺推法或综合法，逆推求证也称为逆推法或分析法。

（一）顺推求证　顺推求证是从待证论题的已知条件出发，经过逐步的逻辑推理而最后达到待证论题的结论的方法。人们要证明论题“如果A则B”，那么顺推求证的思路如下图（由左至右）：

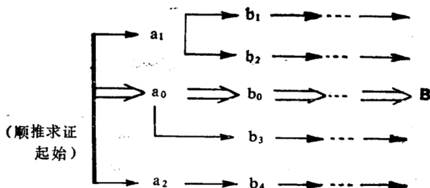


图 91

图中的A表示待证论题的条件，B表示其结论；竖黑线 | 表示思考的起始；所有箭号都表示推理的可能性，比如由A可能推出a_0，a_1，a_2（继续还可能有a_3，a_4…，图中不再表示；此图只是示意图），图中单线箭号⟶表示无效推理，双线箭号⟹表示在多种推理可能性中筛选出的有效推理；a，b，…表示由A推得B的中间各个推理层次。具体说，图中表示：思考从已知条件A出发，各步依已知定义、公理、定理及规则等等，合乎逻辑地推出推论a_0，a_1，a_2等；继而再由a_0，a_1，a_2等又推出推论b_0，b_1，

b_2，b_3，b_4等；…。如此逐层下推，每层所得推论各有若干，在各层推论中应该至少筛选出一个推论，将其纳入由已知条件A达到待证结论B的通道即有效推理之中（如图1横向正中由a_0，b_0…及双线箭号⟹组成的推理系列），这样，我们就得到了"$A \Longrightarrow a_0 \Longrightarrow b_0 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow B$"这一证明线索。

正是由于顺推求证的思路和证明的实际书写具有一致性，所以人们最开始学习（甚至是模仿）的探索证题途径的方法可能就是顺推求证。但是应该看到，这种方法是有一定难度的。因为由一个条件可以推出的推论通常有若干个，而由这些推论可以推出的推论又可能有若干个。在这些思路中，哪些是通向最终结论的"直路"？哪些是"弯路"？还有哪些是"死路"？对于一个复杂的问题，要这样一一判明并不总是可行的。因此，大多数人在用顺推求证法去证明不熟悉的问题时，只好把各种可能的推理随机运用到条件上，盲目地这样试试，那样试试，结果自然不易奏效。因此我们还需要探讨其他方法，并用各种方法彼此配合。

（二）逆推求证　逆推求证是从待证论题的结论出发，一步一步地追溯上去，最后追到待证论题的已知条件的方法。人们要证明论题"如果A则B"，那么逆推求证的思路如下图（由左至右）：

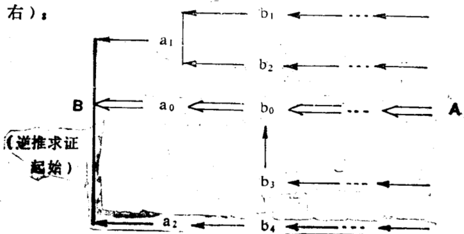


图 92

图9-2表示，思考从待证论题的结论B出发，依已知定义、公理、定理及规则等，要证出B只要证出前提条件a_0，a_1，a_2等等之一就可；而要证出a_0只要证出b_0，b_3之一就可，要证出a_1只要证出b_1，b_2之一就可，要证出a_2只要证出b_4就可；…。如此逐层上溯，应当至少可以得出一条由待证结论B上通已知条件A的有效推理路线。这样，我们就得到了“$B \Longleftarrow a_0 \Longleftarrow b_0 \Longleftarrow \cdots \Longleftarrow A$”这一证明线索。

例 已知：$a>b>0$。

求证：$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$。

证明：（用逆推求证）

①欲证$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$，由于$a>b>0$，

则须证明$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<a-b$，

即$a-2\sqrt{ab}+b<a-b$成立；

②则又须证明$-2\sqrt{ab}<-2b$成立即可；

③于是又须证明$b<\sqrt{ab}$成立即可；

④而$a>0$，$b>0$，

则又须证明$b^2<ab$成立即可；

⑤于是又须证明$b<a$成立即可，此恰为已知条件。

⑥因而$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$。

很明显，逆推求证和顺推求证不同：后者可以把求证思考直接书写成证明答案，而前者却最好只看作是求证思考。如果以逆推求证为书写答案，那就常常会出现叙述繁琐、文辞冗长而又不甚清楚的缺点。因此，最好将逆推求证的路子反转过来，书写成顺推求证式的简明答案。正由于这种原因，人们在实际证题当中经常把逆推求证和顺推求证结合起来运用，先以逆推求证为主寻求证题思路，再用顺推求证有条理地表述证明过程。

五 数学归纳法

对于跟自然数有关的论题的证明，人们一般还采用数学归纳法证明。这种证明的最初始根据是自然数的基本性质，它是经过多少人的研究而最后由意大利数学家皮亚诺（Peano）抽象出来的。在皮亚诺关于自然数的定义中，有三个初始概念和五个命题。三个初始概念是：数、后继和0；五个命题是：

（一）0是一个数；

（二）一个数的后继是一个数；

（三）二个不同的数有不同的后继；

（四）0不是任何数的后继；

（五）任何性质，如果0有此性质，又如果任一数有此性质，它的后继必定有此性质，那么所有的数都有此性质。

皮亚诺所说的数就是自然数，虽然是作为不加定义的初始概念引进的，但实际上关于数的五个命题完全明确地刻画了自然数。这种不明显的定义称为隐定义。上述（五）即皮亚诺定义自然数的第五个命题就是数学归纳法。我们将（五）形式化为：

1. 0具有性质P，记为P（0）；

2. k具有性质P蕴涵着（k+1）具有性质P，记为（k）(P(k)⟶P（k+1））；

3. 于是就有，对于所有自然数k，k具有性质P，记为（k）P（k）。

上述2有时改为：对所有n<k，n具有性质P。这称为第二数学归纳法，它与上述方法（也称第一数学归纳法）等价。

数学归纳法在数学的各个分支和现代逻辑中有广泛的和重要的应用。

例如在算术理论中，加法是这样定义的：

1. $m+0=m$；

2. $m+(k+1)=(m+k)+1$。

上述1是说加法对0有定义；2是说如果加法对k有定义，则加法对k+1也有定义。由数学归纳法可知加法对所有自然数都有意义。

又如在命题演算中，取只有一个联结词“|”的系统，合式公式是这样定义的：

1. 任何命题变项是合式公式；

2. 如果A和B是合式公式，则（A|B）也是合式公式；

3. 只有上述1和2才是合式公式。

在这里，1和3在联结词个数是0的时候定义了合式公式；2和3在如果有$n<k$的条件下定义了联结词个数为n的合式公式，也定义了联结词个数为k的合式公式；由第二数学归纳法形式定义了联结词个数为任何自然数的合式公式。

在研究数学归纳法的应用中，人们通常把基始自然数规定为1，设P（n）是一个含有自然数n的命题，如果

1. P（n）当$n=1$时成立；

2. 在P（k）成立的假定下，可以证明P（k+1）成立。那么，P（n）对任意自然数n都成立。

证明：设S是使得命题成立的所有自然数的集合，则依已知条件1，有$1\in S$；又依已知条件2，当$k\in S$时恒有$(k+1)\in S$；因此，根据数学归纳法原理，有：$S=\omega$。（ω是全部自然数的集合）。

因此应用数学归纳法时，必须包括下面两个步骤：

第一步是基始：证明当$n=1$时命题成立；

第二步是归纳：假设当$n=k$时命题成立，证明$n=k+1$时命题也成立。

完成了这两个步骤，就可以断定命题对任意自然数n都成立。第一步基始是命题论证的基础；第二步归纳是判断命题的正

确性能否从特殊推广到一般。这两个步骤密切相关，缺一不可。事实上，如果只有基始步骤而无归纳步骤，那就属于不完全归纳推理，因而，论断的普遍性是不可靠的。反之，如果只有归纳步骤而无基始步骤，那么归纳步骤中的假定（简称归纳假定）就失去依据，从而使归纳步骤的证明失去意义，这一步即使得以证出，其结果也是建立在不可靠的基础上的，所以仍然不能断定原命题是否正确。

例 试证等差数列的通项公式为

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

这里a_1是等差数列的首项，d是公差，n是项数，a_n是数列的第n项。

证明：

①基始：当$n=1$时，$a_1 = a_1$，命题成立。

②归纳：假设当$n=k$时，$a_k = a_1 + (k-1)d$成立，

那么当$n=k+1$时，根据等差数列的定义，有：

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + d \\ &= a_1 + (k-1)d + d \\ &= a_1 + [(k+1)-1]d。\end{aligned}$$

命题也成立。因此，对于任意自然数n，原命题都是成立的。

应用数学归纳法时，如下三个要点必须牢牢把握，否则会出现失败：

第一，必须有第一步$n=1$的情况。有人好象默认当$n=1$时公式总是成立的，因而认为第一步用$n=1$去验证是多余的，可以省略。这是错误的。比如，$1+2+3+\cdots+n=(n^2+n+2)/2$这个公式，如果假定它当$n=k$时成立，尽管我们可以证明它当$n=k+1$时也成立，然而我们却不能从此得出结论说：这个公式对于任何自然数都是成立的。因为只要用$n=1$代进去验证一下，

就可立即发现它是错误的（$1 \neq (1^2+1+2)/2$）。由此可见，如果我们省略了第一步，那么连公式基本是否成立尚不得而知，我们就不可以假定它当$n=k$时能够成立；因为不先经过验证，那么这样的假定是完全没有根据的。

第二，必须应用$n=k$的假设条件来求得$n=k+1$的结论情况。否则，在第二步中不是根据“当$n=k$时命题成立”这个假设来证明当$n=k+1$时命题也成立；这样即使用其他方法直接推导出这个结论来，也是失掉根据的。

第三，待证公式及其$n=k$、$n=k+1$时的命题结构必须一致。对于从$n=k$推出$n=k+1$的结果时，应注意这个结果与$n=k$时的结构是否一致，否则不足以证明归纳步骤。

第三节　应用数学的主要途径

一般说来，数学方法在社会科学中的实际应用常常有如下几种情况：（一）在语句分析的基础上进行符号化和形式化处理；（二）在定量分析的基础上进行模型化和公理化处理；（三）充分利用更适合于社会科学研究的数学工具。下面简要说明。

一　符号化和形式化

这里所谓“符号化”是指用人工符号语言（如A、B、C等）代替我们日常使用的或阐述理论的自然语言的方法。人工语言是一种进行严格科学研究的有效手段或工具。广义说来，一种形式系统F就是一种人工语言，它是由该系统所用的语言（F（L））、公理与推理规则来构成的。而这个形式系统的语言（F（L））一般又包括初始符号（即A、B、C等字母表和其他语意符号）、由符号串组成的任意表达式，和按一定形成规则构成的合式公式三部分。计算机程序中使用的符号和数字，ALGOL、COBOL、

FORTRAN、BASIC、LISP等程序语言也都是人工语言。

所谓“形式化”就是运用人工符号语言揭示思维形式结构的方法。任何具体的思想都是形式和内容的统一。如果把具有各种不同内容的判断、推理加以比较，就可以揭示出概念在判断组成中的联系方式，判断在推理组成中的联系方式，即揭示出它们的形式结构。

在科学研究中（当然包括社会科学）倡导符号化和形式化数学方法的，首推德国思想家莱布尼茨。他曾希望能够建立一种“普遍的符号语言”（characteristica universalis），这种语言的符号应该是表意的而不是拼音的，每一符号表达一个概念，如同数学的符号一样。一个完善的符号语言同时又应该是一个“思维的演算”（calculus ratiocinator）。他设想，根据这种演算，思维和推理就可以用计算来代替，遇有争论，双方就可以把笔拿在手中说：“让我们来算一下吧！”争论就可以解决。表意的符号语言和思维的逻辑演算，这是莱布尼茨作为思想家提出的伟大设想，也是今天在社会科学领域应用数学方法的重要特征。

对于符号化和形式化方法，我们举例如下：

上表中，“形式语句”即单纯符号化的语句，它是人为构造和设计的；“语句含义”则指形式语句在人们主观意识中如何理解的内容，它也是“人的实践经过千百次的重复”而在人的意识中固定下来的“逻辑的格”①；“具体解释”是指形式语句与客观对象的对应关系，即前者指示后者和后者解释前者的关系。必须看到，形式语句和客观对象之间带有一与多的关系：一种形式语句可以指示多种客观对象，而多种客观对象又可解释一种形式语句。比如“普通公式”那一行，$\frac{m}{V+C}<\frac{m}{V}$的形式语句可以具体指示（1）的政治经济学对象，也可以具体指示(2)的物理学

①列宁：《哲学笔记》，见《列宁全集》第38卷，第233页。

举例范围	形式语句	语句含义	具体解释
BASIC语言	110 INPUT X 120IF X<20 THEN 150 150LETY = 0.15 * X	程序110，询问X。程序120，如果X小于20，那么就按程序150处理。程序150，让Y等于0.15乘以X。	程序110，询问旅客的行李重量。程序120，如果旅客的行李重量小于20公斤，那么就按程序150处理。程序150，让旅客交费等于0.15元乘以行李重量。
数理逻辑	$(p\to q)\land(p\to r)\land(\neg q\lor\neg r)\to\neg p$	因为，如果p那么q，并且如果p那么r，并且或非q或非r，所以非p。	因为，如果他是彻底的唯物主义者那他就要实事求是，并且如果他是彻底的唯物主义者那他就不会主观臆断，而现在他或不实事求是或只凭主观臆断，所以他不是彻底的唯物主义者。
普通公式	$\frac{m}{V+C}<\frac{m}{V}$	m比上V加C，小于m比上V。	（1）剩余价值比上可变资本加不变资本，小于剩余价值比上可变资本（即利润率小于剩余价值率）。 （2）电压比上电阻加感抗，小于电压比上电阻（即混合电路的电强小于单纯电路的电强）。

对象；反过来，（1）和（2）以及其他领域也都可以解释前面的形式语句，或者按照“语句含义”这个“逻辑的格”通过符号化而抽象升华到前面的形式语句①。这是当代新学科——语义学要专门研究的课题。

二　模型化和公理化

模型化即建立数学模型，它是对客观事物的特征或本身的数学描述，要用数学方程式表达出来。爱因斯坦曾说：“科学家必

①从数学角度看，普通公式$\frac{m}{V+C}<\frac{m}{V}$和物理学公式$\frac{U_m}{R+X_L}<\frac{U_m}{R}$等等是异质同构公式。

须在庞杂的经验事实中间抓住某些可用精密公式来表示的普遍特征，由此探求自然界的普遍原理。”① 这里的“自然界”完全可以广义地理解为包括社会和思维领域，而且在这些领域里早已实现着“用精密公式表示普遍特征”了。现实世界的变化一般表现为必然性的、或然性的、模糊性的三种现象，因此对这三种现象从“量”的角度进行研究便相应地形成确定性模型、随机性模型、模糊性模型。

所谓必然现象，就是事物变化服从着确定的因果联系，从前一时刻的运动状态就可以推断出以后各时刻的运动状态。这种现象在数学上就用各种方程式来表示，如代数方程、微分方程、积分方程以及差分方程等。这种方程只要我们把它放在确定的历史条件下，从确定的初始条件和边界条件就可以得到一个确定的解。因此这是一种确定性模型。我们以管理科学为例。某车间分几个工序生产一件产品，为了合理安排各工序的人数，制订了这样一条奖励性措施：对某工序来说，每人一班定额为N件，超额则有超额奖，若某工人自报可超额M件，而实际超额了L件，则超额奖Q可得

$$Q=\alpha M+\beta(L-M)\text{，其中：}\begin{array}{l}0<\beta<\alpha\text{，当}L\geqslant M\text{时，}\\ \alpha<\beta\text{，当}L<M\text{时。}\end{array}$$

这样每个工人为了尽可能多得超额奖，必将尽量对自己的超额数估算得准确些。这里α表示每超额一件最高的奖励数，而 $|\alpha-\beta|$ 则表示为“惩罚”系数，当 $|\alpha-\beta|$ 很小时，M与L接近与否对所得Q影响不大；当 $|\alpha-\beta|$ 很大时，上述奖励性措施不易实行（不受工人欢迎），因此如何选好β则是使这奖励性措施见效与否的关键。这也说明，我们的管理工作一定要克服以往的指令号召和笼统判断状态，一定要走上科学化、数学化道路。

①《爱因斯坦文集》第1卷，第76页。

所谓或然现象，又称随机现象，它的变化往往有几种不同的可能性，究竟出现哪一种结果完全是偶然的、随机的。随机现象服从着统计规律。就是说，当随机现象由大量成员组成，或者成员虽然不多，但出现次数是大量的时候就可以显示某种统计平均规律。概率论和数理统计就是描述这类现象的数学工具，所形成的模型就是随机性模型。还有一类现象，没有分明的数量界限，人们只能使用一些模糊的词句去形容，用模糊的概念去判断。六十年代产生了以模糊集合论为基础的模糊数学，这就是对相当复杂的模糊系统进行定量描述和处理的数学方法，形成的模型就是模糊性模型。

在社会科学领域提炼数学模型是个很复杂的工作。当然首先要根据有关的科学理论确定一些基本的量，以反映系统的量的规定性。如前面关于车间生产例子中的Q（超额奖）、M（自报额）、L（实超额）、α（单元奖）、β（系数）等。接着就要分析量的关系，简化和抽象化为数学公式，从哲学上讲，这一步就是抓主要矛盾的过程。前面例子中的β值和M值就是主要矛盾，它反映了管理者的决定和生产者的积极性的对立统一关系。在建立数学模型时，抓主要矛盾就是要舍末求本，抓住最基本的数量关系。例如，实际上不均匀的东西，在局部可以近似地看成是均匀的；实际上各向异性的内容，在局部可以近似地看成是各向同性的；实际的数量关系是离散的，可以近似地看成连续的，或者相反，把连续的近似地看成离散的；实际上是动态的过程，在考虑瞬间变化很小时，可近似地看成是静态的；实际上是多维空间的问题，可以用取剖面等办法，进行降维等。数学模型决不能毫无遗漏地去反映客体，只能在某种近似的程度上去反映客体。

关于公理化。公理化原本是一种数学方法，它是从少数初始概念和不证自明的公理出发，根据逻辑规则进行推理论证而建立起理论体系的方法。公理方法分为两种，一种是纯粹数学的公理方

法，它起源于两千多年前的欧几里得几何学，直到后来的罗巴切夫斯基和黎曼非欧几何学，特别是希尔伯特《几何基础》，更从理论上建立了抽象的数学公理化方法。希尔伯特提出了关于公理系统的三个基本问题，即无矛盾性、独立性和完备性问题。他提出把数学的公理、定理和推理过程都形式化，用符号表示成符号系统，然后证明这个系统没有矛盾，于是纯粹数学的公理方法中又出现了形式化公理方法。

另一种公理方法称为一般理论的公理方法。由于数学发展史证明公理方法对于概括和整理已有的科学知识、建立科学的理论体系是一种有效的方法，所以这种方法从数学又扩展到其他科学领域。首先是自然科学领域，十七世纪牛顿从少数几条公理（运动三定律、万有引力定律）出发，按照数学的逻辑推理把力学的其余定律逐个推导出来。18世纪拉格朗日的《分析力学》，19世纪克劳修斯的《热的机械运动理论》等，都成功地使用了公理方法。当一门科学积累了相当丰富的理论成果、需要按照逻辑顺序加以综合整理、使之上升为一种理论体系时，则公理方法的有效性和独特作用是明显的。正因为如此，所以公理方法同时也延伸到了社会科学领域。

比如16世纪的笛卡尔就是概括了当时数学特别是几何学的成就，采用所谓"理性演绎法"的公理方法写出《方法谈》、《哲学原理》等著作，他从不证自明的"天赋观念"和"普遍怀疑"的原则出发，根据若干"规则"，演绎出了他那"唯理论"的哲学体系。比如17世纪的斯宾诺莎，更直接用几何学方法成就了他的整个哲学体系。他的好友梅耶尔在给他的书中写序时说："凡是想在学识方面超群绝伦的人都一致认为，在研究和传授学问时，数学方法，即从界说、公设和公理推出结论的方法，乃是发现和传授真理最好的和最可靠的方法。……他们由于同情哲学的不幸命运，放弃了叙述科学的那种通常的大家习用的方法，踏上了新

的然而困难重重的道路，期望运用数学那样的可靠性来论证哲学的其他部门，使这些部门同数学一样繁荣昌盛。"① 当然，笛卡尔和斯宾诺莎等人把数学的公理方法当成了先验的哲学框架，则是片面的。

历史上首次成功地使用一般理论公理方法的是马克思的《资本论》。马克思从商品开始，依次进到货币、资本、剩余价值等过程；剩余价值原理记录了如下这个颠扑不破的真理：剩余价值是说明任何一种资本主义利润的最一般的东西②，它是不能为任何关于事实的补充研究所推翻的规律；然后，马克思就从这个一般原理出发，从资本主义的生产方式的最基本的规律出发，靠着演绎公理方法的帮助，引伸出了一切具体的个别种类的资本主义利润——企业收入、利息、商业利润、地租等等，它们都是剩余价值的体现，从而揭示了整个资本主义的本质。近年来，我国学术界对于公理方法的社会科学应用问题讨论比较活跃，比如唯物辩证法、历史唯物论的逻辑起点和体系构成问题，政治经济学（资本主义部分）的公理化问题等等，有的甚至还应用严格的数学符号化的公理方法③

三 利用更适合的数学工具

数学分支繁多，许多分支都是由于生产、科研和数学本身的具体需要而产生的，因此各个分支都有一个相对的适用范围。比如代数方程适于描述相对静止中的量的关系，而对于变化着的量的关

①《笛卡尔哲学原理》，商务印书馆1980年版，第35—36页。

②马克思1868年给恩格斯的信中曾说："我首先研究剩余价值的一般形式，在这种形式中所有这一切（按指地租、利润、利息等）都还没有区分开来，可以说还处于融合状态中。"（《马克思恩格斯选集》第4卷，第364页）马克思就是在谈自己怎样从"一般"原理进入"个别"问题的研究。

③有兴趣者可参阅《哲学研究》1982年第4期、《社会科学》1986年第12期上的有关文章。

系的描述则要让位于微分方程；常微分方程适于描述一个因变量对一个自变量的变化率的关系，而对于两个以上变量之间的变化率关系的描述则要让位于偏微分方程。我们前面讲过异质同构现象，数学同构所概括的异质现象比较窄小，这种数学关系式应用的范围也就比较窄小；而如果数学同构所概括的异质现象比较广泛，那么这种数学关系式应用的范围也就相应地广泛。一般说来，代数、微积分、线性方程、微分方程、离散数学等学科的同构所概括的异质现象比较广泛，所以它们在至今我们所见到的社会科学的数学方法中经常被采用。但是还有一些数学分支，现在表现得越来越被社会科学所重视，比如概率统计、数理逻辑等就是。

关于概率统计。概率统计的全称是概率论与数理统计，它主要是对随机性、或然性、模糊性和多变性中的规律性问题进行数学的研究和刻划。不难看出，在社会科学所涉及的各个领域中，更多的问题是带有随机性、或然性、模糊性和多变性的，因此概率统计在社会科学中带有极普遍的意义。

数理统计方法在自然科学和社会科学中几乎是无孔不入的，它研究如何安排调查和抽样，以及如何根据调查得到的数据来找出描写随机现象的某些数量指标，找出各类指标间的关系等等。在此不备赘述①。

关于数理逻辑。数理逻辑（亦称符号逻辑）是用数学原理或方法研究推理的规律，研究正确思维所遵循的规律的科学。数理逻辑象近代数学一样，系统地使用符号、公式来陈述处理自己的问题，对于理论中的概念作出严格的定义，对于定理作出严格

①谨向社会科学工作者推荐两本书：〔美〕W·亚当斯著《数学及其在社会科学中的应用》(Mathematics And Its Application In SocialSciences，译本即将由中国社会科学出版社出版），青义学编《医用高等数学》（湖南科技出版社1986年版，该书作为非数理专业用书，在当前尚缺社会科学专业数学用书的情况下，足资参考。书中除普通高等数学内容外，尚有概率论和模糊数学等）。

的证明等等。因此它既属于逻辑学，又属于数学。数理逻辑的基础部分是演绎逻辑，其中包括命题逻辑、谓词逻辑、模态逻辑等。学习和运用这些知识，对于广泛的社会科学研究都很有裨益，因为它们是对自然语言进行形式化处理的良好工具。举例来说：

举例范围	自然语言语句	形式语言语句
命题逻辑	人不犯我，我不犯人；人若犯我，我必犯人。	$(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (p \rightarrow q)$
谓词逻辑	任何社会都存在着生产力和生产关系的矛盾。	$(X)(Fx \rightarrow (\exists y) Ry, x)$
模态逻辑	如果要收获，那就得付出劳动，这是必然的；要收获而不付出劳动，是不可能的。	$\Box(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg \Diamond(p \wedge \neg q)$

数理逻辑能够处理自然语言的语句，当然也能处理各种类型的推理论证。这种处理能力虽然是相对的，但是随着数理逻辑的发展，这种能力在不断扩展和增强。甚至可以说，数理逻辑本身蕴涵着一种对自然语言无限逼进的潜力，它本身的发展完全可以对自然语言的各种形态和各个角落进行形式化处理。比如我国逻辑学家莫绍揆曾用数理逻辑成功地分析了《墨子·小取篇》的体系结构①。还比如在一本《有趣的数理逻辑》（何普恒著）书中，作者列举了许多哲学、历史、法学、日常生活等方面的小例子，阐明了数理逻辑是如何解决实际问题的。笔者也曾用数理逻辑工具分析过我国古典文献中有名的逻辑奇文《公孙龙子·指物论》，发掘出了许多新义②。在西方，逻辑经验主义、逻辑实用主义和整个分析哲学流派都把数理逻辑作为哲学研究的工具，这在一定程度上是有他们的科学道理的。

①参见莫绍揆：《数理逻辑初步》，上海人民出版社1980年版。

②拙文：《以数理逻辑解析〈指物论〉》，载《学习与思考》1984年第3期。

附录　当代中国的几部逻辑学著作简介

自新中国成立以来，特别是"十年动乱"之后，我国在逻辑研究领域成果显著。这里只能简要介绍其中的一个部分。所列书目也是本书的主要参考。

《逻辑》（金岳霖 著，生活·读书·新知三联书店1961年出版，共303页。）

作者金岳霖(1895—1984)是我国著名的哲学家和逻辑学家。本书在1937年曾由商务印书馆出版（以前还曾有清华大学讲义版），被列为当时的大学丛书。1961年本书由三联书店重印；1978年又在香港重印。本书是我国第一本比较详细地、有系统地讨论逻辑，包括数理逻辑的书，它对我国数理逻辑起到极大的作用。书中比较详细地介绍罗素和怀德海所著《数学原理》前23章的内容，即该书的基本内容。其中对命题演算部分介绍得比较详细，大多附有推导（证明），后面的部分则介绍得比较简略，几乎没有推导，只有文字上的描述性说明。本书目次：序，第一部传统的演绎逻辑，第二部对于传统逻辑的批评，第三部介绍一逻辑系统，第四部关于逻辑系统三种。经过作者早年的辛勤介绍，数理逻辑终于在中国生根、发芽、成长起来了。作者培育了一批现代逻辑的人才，成为中国现代逻辑的奠基者。但是作者在《逻辑》一书的1961年重版时，附有一篇长达三万余字的《对旧著"逻辑"一书的自我批判》文章，学术界认为此文是在当时极左思潮的影响下写出来的。

《形式逻辑》（金岳霖 主编，人民出版社1979年版，共357页。）

本书是具有一定权威性的高等学校文科教材。全书篇幅不算长，但它所介绍的思维形式和逻辑方法却比一般的教材要丰富和详尽。比如，在概念部分，作者把定义的逻辑方法区分为真实定义和语词定义两类，又把语词定义分为说明的语词定义和规定的语词定义两种，并且分析了真实定义和语词定义的关系。在判断部分，介绍了关系判断；讨论了诸如“S就是P”、“只有S（才）是P”、“除X外，S都是P”、“既然p，那么q”等八种比较特殊的判断式；在说明复合判断的真假关系时，应用了数理逻辑的真值表方法。在演绎推理部分，介绍了关系推理、模态推理以及假言易位推理、反三段论推理等等推理形式。在归纳推理部分，介绍了有关概率和统计方法的一般知识。以上这些内容，对于人们进行正确思维都是很有用的，也是一般逻辑教科书中很少提到的。本书作者注意了新中国以来逻辑学界开展的学术讨论，对其中一些比较主要的争论问题都提出了自己的见解。在高校文科逻辑教材中，有选择地介绍一些学术界争论问题，对于开阔学生眼界，引导他们向逻辑学继续深造，都是很有好处的。

《数理逻辑引论》（王宪钧 著，北京大学出版社1982年版，共372页。）

这是一部深入浅出的数理逻辑教程，哲学、数学及其他专业均可采用，逻辑、语言学、计算机科学、科学史等领域的研究人员也可作为参考书使用。本书分3篇。前两篇主要介绍古典的命题演算和狭谓词演算。基本概念的讲解、定理和元定理的证明力求详尽易懂，使没有预备知识的读者也能领会实质、掌握技巧。第三篇论述从莱布尼茨到歌德尔（17世纪至本世纪30年代）的数

理逻辑发展史，并就一些重要的数学基础问题发表了作者的见解。具体说，第一篇讲命题逻辑，第一章真值联结词、真值函项及重言式，第二章命题演算及命题逻辑的公理化和形式化，第三章范式、完全性、一致性及公理的独立性；第四章不同的命题逻辑及古典命题逻辑的不同的公理化。第二篇讲狭谓词逻辑，第一章形式结构及普遍有效性和可满足性，第二章狭谓词演算，第三章演绎定理及范式，第四章判定问题及一致性和完全性，第五章不同系统，第六章有等词的狭谓词演算及摹状词。第三篇数理逻辑发展简述，第一章讲第一阶段，第二章至第五章讲第二阶段，第六章讲第三阶段。

《数理逻辑教程》（莫绍揆 著 华中工学院出版社1982年版，共391页。）

作者在本书“序言”中写道：“作者在十多年前虽写过一本《数理逻辑导论》（上海科学技术出版社），但那本书目前已很难买到。而且，近十多年来数理逻辑科学发展很快，新论据、新见解源源出现，即使将旧著再版，也不适宜。因此作者特再写这本教程，它与旧著大不相同，成了一本崭新的著作。”本书以教材的形式向读者介绍数理逻辑的基本理论和新成果。书中系统地论述了数理逻辑各重要概念的来龙去脉以及数理逻辑各家的学说，并根据理论与实际相结合的原则，对开关布尔表达式的最新化简方法等作了介绍。作者还提出了不少创见，如约束词的新说法、永真假性的特征数的概念等。本书在使用符号上很有特点：在逻辑代数部分使用前置式（如fxy等），在逻辑演算部分使用中置式（如xfy等）。书中绪言讲数理逻辑的对象与符号的使用法，第一、二章都讲逻辑代数，第三、四章都讲逻辑演算。书中每逢引入一个新概念时，尽可能说明它是怎样应日常语言的要求而产生的，又每逢数理逻辑的概念可以应用于数学并且可以帮助

澄清数学上一些概念时，力图详细介绍。

《数理逻辑基础(上、下)》（胡世华　陆钟万　著，科学出版社1982年版，共434页。）

本书包括六个部分。绪论部分对数理逻辑的性质，逻辑演算的大概内容，以及阅读以后各章所需要的预备知识作了简要的说明。第一章构造了命题逻辑和谓词逻辑的自然推理系统，通过其中的形式推理研究演绎推理。第二章研究逻辑演算形式系统的某些重要的系统特征，由于这些特征往往是本书中几个有关的逻辑演算系统所共有的，因而将这些系统特征集中在一章之中加以研究。第三章陈述逻辑演算的重言式系统，并研究自然推理系统和重言式系统之间的关系。第四章研究逻辑演算的可靠性（形式推理是否与所反映的演绎推理一致）、完全性（形式推理是否完全地反映了演绎推理）和独立性（逻辑演算中的形式推理规则是否都不是多余的）问题。第五章讨论了逻辑演算如何应用于陈述具体的数学理论，构造了初等代数、自然数、集和实数理论的形式系统，并且研究了在形式系统中引进形式符号定义的问题。本书可以用作数学专业和其他专业数理逻辑课程的教材或教学参考书，或者供有关工作人员参考。本书内容是自足的，可用于自学。

《模态逻辑引论》（周礼全　著，上海人民出版社1986年版，共416页。）

模态逻辑是逻辑的一个古老的分支，也是近几十年蓬勃发展的一个重要分支。本书是我国在这个领域研究中的代表作之一。全书共十一章。第一章绪论，除了讲述数理逻辑与模态逻辑的关系以外，主要讲述形式语言、对象语言与元语言等现代逻辑的若干基本问题。第二、三章讲现代逻辑的两个基础演算，即命题逻辑与谓词逻辑，这是学习模态逻辑的知识准备，其中讲了形

式语言L_1和L_2，而后面将要讲的模态逻辑则使用形式语言L_3。第四、五、六、七章讲模态命题演算，其中包括T、S_4和S_5系统等，主要讲这些系统的基础构成、一些定理、解释、语义图、可靠性、一致性、完全性和判定问题等。第八、九章讲模态谓词演算，其中包括QTB与QS_4B、QT、QS_4与QS_5系统等，所讲方面与上述模态命题演算的各方面相近。第十章讲模态逻辑的自然推导系统，主要分三个层次来讲，首先讲一般的命题逻辑与谓词逻辑的自然推导系统，其次讲模态命题逻辑的自然推导系统，最后讲模态谓词逻辑的自然推导系统。第十一章讲模态逻辑简史。语言洗练，构篇严整，阐述准确，这是本书的最大特点。

《现代逻辑科学导引（上，下）》（王雨田 主编，中国人民大学出版社1987年版，共1370页。）

全书总目：（上册）前言，A_1现代逻辑科学的几个问题；B_1数理逻辑的形成和发展简述，B_2命题逻辑与一阶逻辑，B_3模型论，B_4集合论，B_5递归论，B_6证明论，B_7证明的代数理论，B_8直觉主义逻辑；C_1布尔代数，C_2判定问题，C_3逻辑语义学，C_4相干命题逻辑，C_5模态逻辑，C_6反事实条件句逻辑，C_7多值逻辑，C_8非标准量化逻辑，C_9悖论。（下册）D_1概率逻辑，D_2条件化逻辑，D_3归纳逻辑；E_1量子逻辑，E_2模糊逻辑，E_3逻辑与智能计算机；F_1存在逻辑，F_2时态逻辑，F_3拓扑逻辑，F_4认识论逻辑，F_5断定逻辑，F_6问句逻辑，F_7道义逻辑，F_8优先逻辑，F_9自然语言逻辑；G_1逻辑方法；H_1国外辩证逻辑研究。本书编排试图体现逻辑科学的历史发展和理论体系以及各个分支间的内在联系，同时力求保持各个分支学科的相对独立性。书中A类带有总序性质，B类为数理逻辑与数学基础，C类为传统逻辑和数理逻辑，主要是演绎逻辑，D类为归纳逻辑与概率逻辑，E类为逻辑在现代科学技术中的应用，F类为哲学逻辑，G类为逻辑方法，

H类为辩证逻辑。

《墨经的逻辑学》（沈有鼎　著，中国社会科学出版社1980年版，共95页。）

这是我国现代学者研究我国古典逻辑的精粹之作。冯友兰先生在《中国哲学史史料学初稿》中说：“《墨经》中包括有逻辑学的知识，特别是《小取篇》有关于逻辑学的系统的理论，《大取篇》有关于逻辑学的原则的探讨，这部分内容有待于逻辑学家作进一步的探人研究。沈有鼎所撰本书是这方面的研究成果之一。”本书包括：导言，《墨经》的认识论，“辩”的目标和功用，“指”和“名”，“辞”和同异，“说”和“辩”的原则及个别方式，思想战线上的《墨经》等。本书在校勘方面遵守的原则是：没有必要的时候不轻易改动原文。书末附录有作者用现代逻辑方法研究“《墨经》论数”。作者沈有鼎先生是我国在国际上知名的学者。王宪钧教授在他的《数理逻辑引论》前言中说：“在早年教学过程中，沈有鼎教授曾给我不少帮助。”胡世华教授在他们的《数理逻辑基础》序中说：“沈有鼎同志在三十年代初就有了关于构造逻辑演算的自然推理系统的思想，本书所构造的自然推理系统是受到这种思想的启发的。”沈有鼎教授在我国现代逻辑研究中做出了显著贡献。

《数理逻辑初步》（莫绍揆　著，上海人民出版社1980年版，共172页。）

本书通过对“数理逻辑的由来”、“数理逻辑的主要内容”、“关于数理逻辑的三大派”、“数理逻辑中一些基本概念”、“数理逻辑的应用”等各章内容的阐述，初步回答了人们所关心的关于数理逻辑的一些问题。作者考虑到本书读者主要是哲学和逻辑工作者，所以尽量避免过多涉及高深的数学理论问题，而着

重采用纵横交织的叙述方法来介绍数理逻辑。所谓"纵"，就是数理逻辑产生和发展的历史，所谓"横"，就是数理逻辑各部分的内容。作者把这两方面交织起来叙述，可以说是此书的一大持点。作者首先从传统逻辑的不足谈起，接着叙述了在数学基础研究中人们寻求相容性(即逻辑上的无矛盾性)证明的历史过程，说明了数理逻辑的产生不是偶然的，而是由于逻辑和数学这两门科学的内在矛盾的推动，才促使了数理逻辑这门学科的兴起。在介绍数理逻辑内容时，又按照它的历史发展线索，有联系地讲述了公理集合论、证明论、能行性理论和模型论。这种叙述方法使人可以从总体上对数理逻辑获得一个概貌的认识。

《数理逻辑通俗讲话》(王浩　著，科学出版社1981年版，共257页。)

作者王浩是著名的美籍数理逻辑学家。本书是王浩教授所著"Popular Lectures on Mathematical Logic"一书的中译本。1977年10月间，作者在中国科学院作了六次关于数理逻辑的广泛而通俗的讲演，本书就是在这些讲演的基础上写成的。全书共有8章和3个附录。第一章是数理逻辑一百年；第二章介绍形式系统、谓词演算和Gödel不完全性定理以及不可判定的数学问题；第三章介绍计算机的进展、计算机应用的几个例子和四色定理的证明；第四章讨论问题和解；第五章讨论一阶逻辑；第六章讨论理论的和可实现的计算，第七章讨论直线上有多少个点?第八章是统一化与多样化问题。附录一是骨牌游戏与无穷性引理，附录二是算法与机器，附录三是抽象机。作者在"前言"中说："这些讲演一般是互相独立的，因此不必顺序阅读。有时候某些概念和定理在不同的地方重复陈述，交叉引用。三个附录可能是本书中最初等的部分。第三章和第四章也不假定读者要熟悉数理逻辑。第一章和最后一章是一般性概述。其余四章参差不齐，有的部分

阅读起来不需要很多的预备知识，另外的部分仅以表面上是简单的方式讲了复杂的内容。”

《形式逻辑原理》（诸葛殷同等　著，人民出版社1982年版，共390页。）

这是一本高等学校文科逻辑课程的教学参考书，也是作为具有中等以上文化程度的自学者的参考书。书中在历史材料介绍和逻辑学中哲学问题的讨论等方面，有意有所忽略；而着重于思维形式方面的基本理论的阐述。本书最大特点是在概念、命题、推理部分比较多地引入了现代逻辑内容。第一章绪论，讲述了形式逻辑的对象、性质和作用。第二章概念，除讲述内涵和外延、定义和分类等问题之外，还专节讲述了集合和集合运算。第三章命题，与传统的“判断论”讲法大不一样，主要讲述命题形式、联接词、量项、模态词等。占全书将近1/3的篇幅是第四、五章演绎推理，现代逻辑的重心就是讲演绎推理，第四章是讲传统逻辑中的演绎推理问题，如带联接词的选言、联言、假言推理，带量词的直接推理和三段论等；第五章则专讲现代逻辑的命题逻辑和谓词逻辑问题。第六章归纳方法，其中概率和统计方法简介是很有特点的。第七章形式逻辑的基本规律，第八章论证，这些内容大多和传统讲法相近。

《数理逻辑》（胡耀鼎　张清宇　著，中国标准出版社1985年版，共262页。）

本书是为中央电视台举办的《数理逻辑》电视讲座而撰写的。它系统地介绍了数理逻辑的基础知识，重点介绍了自然推理系统。本书共分五章，第一章至第三章讲命题逻辑，并对数理逻辑的性质、逻辑演算的大概内容及学习本书所需要的预备知识作了说明。这部分主要介绍了自然推理系统FPC。自然推理系统的

出发点除了由定义给出的公式的形成规则外，只是一些用模式给出的变形和推演规则。FPC系统对可证公式的证明过程，显现得非常清楚。第四章和第五章讲一阶（谓词）逻辑。这部分主要介绍了自然推理系统FQC。本书对FPC和FQC都进行了元逻辑讨论。在最前的"引言"部分，作者讲述了传统逻辑的局限性以及数理逻辑的兴起和一般特征问题。作者指出：数理逻辑是现代的形式逻辑。形式逻辑的传统内容包括三段论和假言推理等。历史上使用形式逻辑一词只限于演绎方法而不包括归纳方法，是从形式结构来研究演绎方法的科学。数理逻辑正是这一研究的现代发展。

《西方逻辑史》（马玉珂主编，中国人民大学出版社1985年版，共387页。）

本书主要讲西方传统形式逻辑的历史。但由于现代形式逻辑是传统形式逻辑的继续，是它的发展的新阶段，因此从莱布尼茨起，作者也对现代逻辑的发展作了必要的概括论述。全书共分4篇12章。第一篇古希腊罗马的逻辑，第二篇中世纪和文艺复兴时期的逻辑，第三期近代逻辑，第四篇现代逻辑。作者认为：逻辑学是关于以推理、论证有效性为核心的思维形式和思维规律的科学。西方逻辑史就是研究这些逻辑思想、学说发生、发展及其规律性的历史。本书特色之一就是对西方近现代逻辑史的研究占了很大比重，特别是第四篇的现代逻辑部分，其中第十章详细介绍了布尔代数的情况，包括其前驱哈米尔顿与德摩根的逻辑学说，包括布尔代数本身及后来的发展；在第十一章弗雷格与罗素的逻辑学说中，广泛介绍了皮尔斯、弗雷格、皮亚诺、怀特海和罗素的情况；第十二章现代形式逻辑的新发展，重点介绍了哥德尔、维特根斯坦、塔尔斯基、卡尔纳普和奎因等人的逻辑思想，同时总结了现代逻辑发展的几种趋势。

《简明数理逻辑基础》（刘治旺　等著，福建人民出版社1985年版，共278页。）

本书是为高等院校哲学、心理学等非数学专业的学生以及一般的逻辑学工作者学习数理逻辑而编写的。尽可能结合传统逻辑通俗易懂地介绍数理逻辑基础知识，是作者编写此书的基本原则。全书共有七章和两个附录。第一至五章，讨论了所谓“两个演算”的命题逻辑和谓词逻辑。其中介绍的推理方法，主要是自然推理方法，此外，还概括介绍了公理方法。在命题逻辑部分，主要介绍与逻辑联结词有关的逻辑规律的理论；在谓词逻辑部分，介绍了与量词以及与关系命题有关的逻辑规律的理论。学习“两个演算”，使人们掌握数理逻辑的一些必需的基本概念和基本技巧，为进一步学习打下必要的基础，同时也了解到用数理逻辑成果处理传统逻辑的具体方法。第六、七两章，主要介绍了集合论和关系理论的基础知识。通过对任意集合之间比较重要的关系的直观说明和次序关系的研究，将使读者看到这些理论与传统逻辑的关系及其在社会科学中的作用。书末附录有直言三段论公理系统和部分习题解答。

《公理学、元数学与哲学》（张家龙　著，上海人民出版社1983年版，共125页。）

在学习现代逻辑当中，本书很有参考价值。目前，公理学已经远远越出数学的范围，它不但在现代数学和数理逻辑中应用很广，而且还渗透到其他自然科学甚至某些社会科学部门，为研究这些学科提供了强有力的工具。因此，公理学具有极其重要的科学方法论意义。另一方面，公理学和元数学本身的成果也具有十分丰富的哲学意义。本书试图概述公理学和元数学的方法及其所取得的一些重要成果，在此基础上探讨一些哲学问题。具体说，

本书共有四章，第一章公理学的发展，介绍实质公理学、形式公理学和元数学等阶段。第二章逻辑演算及其元理论。第三章形式算术系统，不完全性和不可判定性。第四章公理学和元数学的若干哲学问题，这是很有特色的一章，讲述了公理学的辩证本性，公理学中的唯心主义和形而上学观点批判，元数学成果的哲学意义。全书资料翔实，语言简练，对人很有启发意义。

《归纳逻辑》（北京市逻辑学会　编，中国人民大学出版社1986年版，共394页。）

本论文集是我国建国以来探讨归纳逻辑问题的第一部专集。本论文集的编排是按照下列原则进行的，即先论文后资料，先国内后国外，先理论与应用后现状与历史，先总论后分论。其中，有的论文以马克思主义认识论为指导，探讨了归纳疑难问题及其解决途径；有的论文从思维实际出发，概括出归纳的新形式并论及其应用；有的论文对国外近现代研究归纳问题的成果进行了述评；有的论文概述了我国和外国归纳逻辑发展的历史；有的论文具体探讨了归纳在形式逻辑的科学体系和教学体系中的地位问题，以及如何充实有关归纳的内容等问题。其中的资料，有的介绍了国外的逻辑观点；有的综述了学术讨论会的情况及不同的学术观点。本书最后有《苏联大百科全书》（第三版）逻辑词条选译，其中“逻辑”词条中说：现代逻辑是传统逻辑的历史继承者，在某种意义上又是它的直接延续。不过，与传统逻辑不同，现代逻辑的特征是建立了各种关于逻辑论证的形式化理论，即所谓逻辑“形式系统”或逻辑演算，使得能将逻辑论证作为严格分析的对象，从而充分地描绘其性质。

《逻辑与演绎科学方法论导论》（塔尔斯基　著，周礼全等译，商务印书馆1963年版，共233页。）

塔尔斯基（1902年出生于波兰，1945年入美国籍，1983年逝世）所著本书是一部颇为流行的数理逻辑入门书。作者在“序言”中指出：第一，本书不包括对逻辑的系统的和严格的演绎的陈述；第二，除了两处很少的篇幅以外，这一本书没有提供关于传统的亚里士多德的逻辑的知识；最后，这一本书不涉及属于所谓经验科学的逻辑和方法论的任何问题。本书共有两部分，包括十章。第一部分，逻辑元素和演绎方法：（1）论变项的用法，（2）论语句演算，（3）同一理论，（4）类的理论，（5）关系的理论，（6）论演绎方法。第二部分，逻辑和方法论在构造数学理论中的应用：（7）一个数学理论的构造：数的次序的定律，（8）一个数学理论的构造：加法和减法的定律，（9）关于所构造的理论的方法论的讨论，（10）所构造的理论的扩充，实数算术的基础。全书最后有作者推荐的读物，其中包括罗素的《数理哲学导论》（有中译本），并认为，这本书对于现代逻辑的那些最重要的概念给予了清楚与易懂的说明，特别是关于那些证明数学是逻辑的一部分必须应用的概念。

《逻辑导论》（〔美〕P·苏佩斯　著，宋文淦等　译，中国社会科学出版社1984年版，共396页。）

本书作者是美国斯坦福大学哲学教授。本书是由美籍数理逻辑学家王浩推荐给我国学术界的。作者当初对本书是为用作现代逻辑初级教程的课本而写的，它不要求事先具备数学或哲学方面的背景知识，目标是想让读者掌握一门精确而完整的逻辑推理理论，并且说明这一理论可以怎样应用于数学和各门经验科学。本书在我国学术界广为流传。内容分为两大编，第一编（前八章）论述推理和定义的形式原则，从第二章的语句推理理论开始，一直着重运用解释的方法来证明论证的有效性、前提的一致性或者一个理论的公理的独立性。第七章把形式的推理理论同整个数学

中通用的非形式的证明联系起来。第二编（后四章）专门论述初等直观集合论的，包括分别以集合、关系和函数为主题的几章。这一编几乎是自足的，可以离开第一编单独来读。最后一章（第十二章）是关于公理方法的集合论基础的。把数学的某一分支公理化，最好的方法是定义出适当的集合论谓词。这一观点给公理化方法提供了一个明确的逻辑基础，这在近几年的有关书籍中都没有阐述过。

《科学逻辑》（张巨青　主编，吉林人民出版社1984年版，共368页。）

本书是一部系统地论述经验自然科学的逻辑方法论的学术著作。大致篇目有引论、十二章和附录。引论主要讲科学逻辑的划界、研究纲领和基本特征问题；第一章讲问题与直觉，研究理论发现从问题开始，解决问题的一般逻辑以及直觉在科学发现中的作用；第二、三、四、五章讲比较与分析、综合与概括、类比与想象、抽象与理想化等问题，一般都是讲这些问题的概述和合理性原则问题；第六章讲假说的形成与检验，第七章讲观察与实验，第八章讲归纳与确证，第九章讲演绎与证伪，第十章讲理论的修改、淘汰与复活，第十一章讲科学理论系统化，第十二章讲科学知识的增长；附录讲西方科学逻辑方法论发展概要。本书特点在于努力用辩证唯物主义的观点，评述现代西方科学哲学中有关科学方法论的某些思想和主张，同时提出了自己比较系统的新看法。另外书中运用科学史和现代自然科学的大量实例作为分析和论证问题的依据，使行文很有生气和逻辑力量。

《形式化：现代逻辑的发展》（朱水林　著，人民出版社1987年版，共299页。）

从传统的形式逻辑到现代数理逻辑，这是人类思维不断深化、

精确化和完善化的过程；这一过程的标志就是逻辑研究的不断形式化。本书以形式化为主线，在追溯逻辑发展史的同时，阐述了现代逻辑的孕育、形成和发展，着重介绍了现代逻辑的三个划时代的成果：哥德尔不完全性定理，塔斯基的形式语言真理论，图灵机和判定问题的内涵、意义及其影响。作者从哲学的高度把握了整个逻辑学的内在统一性，并以通俗易懂非形式化的语言，对数理逻辑这门科学作了较为详细的介绍，向我们展示了逻辑科学从描述性的反思维论到形式化科学发展的内在必然性，说明现代逻辑是传统逻辑长期演化、高度发展的产物，是人类思维进化的伟大成果。本书由逻辑学家周礼全先生作序。全书正文有：一、引言；二、数学的形式化；三、逻辑学的形式化；四、现代逻辑基础介绍；五、哥德尔不完全性定理；六、塔斯基的形式语言的真理论；七、图灵机和判定问题；八、结论。

《逻辑学辞典》（《逻辑学辞典》编辑委员会　编，吉林人民出版社1983年版，共896页。）

本辞典是我国第一部比较全面的逻辑学辞典，共编入词条1937个，其中包括形式逻辑、数理逻辑、辩证逻辑、中外逻辑史、因明学等方面的名词术语的解释，以及学说、学派、人物、著作的介绍等，也有对新的逻辑学分支和部分逻辑理论在科技上的应用等方面进行介绍的词条。本辞典主要是为逻辑学工作者、哲学社会科学工作者、一般自然科学理论工作者、大中学校的教师和学生，以及学习、研究逻辑学的同志，提供一部较为适用的工具书。本书特点是以传统逻辑为主，兼及其他，对于一些基本概念介绍也比较全面，比如概念论部分就集中选出41条，命题逻辑部分集中选出38条，谓词逻辑部分集中选出29条进行解释，通过这种讲解使读者不仅对某个具体词条有个简要的认识，而且从逻辑学的某个部类上也得到一个梗概的了解。词条讲解得详略得当，

比如在中国逻辑史词条中，人物、词语、著作等方面介绍比较简要，而“中国逻辑史”词条的讲解就比较详细，它包括了历史发展、主要内容和特点及总的评价等。本辞典是专业学习的较好工具书。

现代社会科学丛书要目

本丛书系统搜集第二次世界大战后国内外社会科学各学科领域出现的新资料新观点新知识写成。为了保证质量，编委会在国内有关各学科有权威的研究机构中延聘学者编写。从1989年起将陆续出书。人手一套，即可对当代社会科学有一系统的理解。

名　书	作者（工作单位）
现代政治学	吴英增等（中国社科院政治学研究所）
现代军事学	王普丰等（中国军事科学院战略部）
现代国际关系学	张历历等（北京外交学院）
现代法学	陈宝林等（西南政法学院）
现代社会学	林国灿等（中国社科院社会学研究所）
现代人类学	周大鸣等（中山大学人类学系）
现代人口学	魏津生　（《人口与经济》编辑部）
现代经济学	赵素英（国家经济体制改革研究所）
现代历史科学	陆象淦（中国社科院文献情报中心）
现代地理科学	待　定
现代文化学	石奕龙（厦门大学人类学系）
现代教育学	藤　纯（中央教育科学研究所）
现代新闻学	何光先（中国社科院新闻学研究所）
现代哲学	涂继亮等（中国社科院哲学研究所）
现代道德科学	陈　瑛等（中国社科院哲学研究所）
现代美学	涂武生（中国社科院文学研究所）
现代宗教信仰	冯嘉芳（中国社科院世界宗教研究所）
现代思维科学	张光鉴（山西省社科院思维科学研究所）
现代方法科学	待定
现代心理学	管连荣（中国科学院心理学研究所）
现代逻辑学	李树琦（中国社科出版社）
现代语言学	周流溪（北京师范大学外语系）